

MÉTODOS ASTRO-GEODÉSICOS (SEMINARIO)

PROGRAMA DEL SEMINARIO

- 1.- Proyecciones sobre el elipsoide.
- 2.- Proyección de Helmert. Coordenadas geodésicas y rectangulares.
- 3.- Reducción de observaciones astronómicas al elipsoide.
- 4.- Reducción de ángulos horizontales y verticales.
- 5.- Reducción de coordenadas astronómicas por curvatura de la línea de la plomada.
- 6.- Determinación astrogeodésica del geoide.
- 7.- Nivelación astro-gravimétrica.
- 8.- Transformaciones de coordenadas y cambio de dátum.
- 9.- Determinación de las dimensiones de la Tierra.
- 10.- Elipsoide medio terrestre.
- 11.- Geodesia tridimensional.

BIBLIOGRAFÍA BÁSICA

- W. A. Heiskanen y H. Moritz. *Geodesia Física*.
Edita Instituto Geográfico Nacional e Instituto de Astronomía y Geodesia. Madrid, 1985.
- W. Torge. *Geodesy, 2nd Edition*.
Editor W. de Gruyter. Berlín, 1991.
- P. Vanicek and E. Krakiwsky. *Geodesy : The Concepts*.
Elsevier Science Publishers. Amsterdam, 1986.

BIBLIOGRAFÍA DE CONSULTA (<http://airy.ual.es/geodesy/libros.pdf>)

Capítulo XII. Métodos astrogeodésicos y geodesia tridimensional

$$\begin{aligned}\phi &= \Phi - \xi \\ \lambda &= \Lambda - \eta \sec \phi \\ h &= H + N\end{aligned}\quad (\text{XII.1})$$

$$\phi_{\text{Helmert}} = \phi_{\text{Pizzetti}} + \frac{H}{R} \xi \quad \gg \quad \lambda_{\text{Helmert}} = \lambda_{\text{Pizzetti}} + \frac{H}{R} \eta \sec \phi \quad (\text{XII.2})$$

$$\begin{aligned}x &= \rho_N \cos \phi \cos \lambda \\ y &= \rho_N \cos \phi \sin \lambda \\ z &= \frac{b^2}{a^2} \rho_N \sin \phi\end{aligned}\quad (\text{XII.3(a)})$$

$$\rho_N = \frac{a^2}{\sqrt{a^2 \cos^2 \phi + b^2 \sin^2 \phi}}, \quad \bar{n} = (\cos \phi \cos \lambda, \cos \phi \sin \lambda, \sin \phi) \quad (\text{XII.3(b) y (c)})$$

$$\begin{aligned}X &= x + h \cos \phi \cos \lambda & X &= (\rho_N + h) \cos \phi \cos \lambda \\ Y &= y + h \cos \phi \sin \lambda & Y &= (\rho_N + h) \cos \phi \sin \lambda \\ Z &= z + h \sin \phi & Z &= \left(\frac{b^2}{a^2} \rho_N + h \right) \sin \phi\end{aligned}\quad (\text{XII.4(a) y (b)})$$

$$\tan \phi = \frac{Z}{p} \left(1 - e^2 \frac{\rho_N}{\rho_N + h} \right)^{-1} \quad \gg \quad p = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad (\text{XII.5})$$

$$\Delta\alpha = \eta \tan \phi + (\xi \operatorname{sen} \alpha - \eta \operatorname{cos} \alpha) \cot z \quad (\text{XII.6})$$

$$\begin{aligned} \phi &= \Phi - \xi \\ \lambda &= \Lambda - \eta \sec \phi \\ h &= H + N \\ \alpha &= A - \eta \tan \phi \end{aligned} \quad (\text{XII.7})$$

$$z = z' + \varepsilon = z' + \xi \operatorname{cos} \alpha + \eta \operatorname{sen} \alpha \quad (\text{XII.8})$$

$$s_0 = l' + \varepsilon_B (h_B - h_m) - \varepsilon_A (h_A - h_m) - \frac{h_m}{R} s_0 \quad (\text{XII.9})$$

$$l^2 = (h_2 - h_1)^2 + 4R^2 \left(1 + \frac{h_1}{R}\right) \left(1 + \frac{h_2}{R}\right) \operatorname{sen}^2 \frac{\psi}{2} \quad (\text{XII.10})$$

$$l_0 = \sqrt{\frac{l^2 - \Delta h^2}{\left(1 + \frac{h_1}{R}\right) \left(1 + \frac{h_2}{R}\right)}} \quad s_0 = R\psi = 2R \operatorname{sen}^{-1} \frac{l_0}{2R} \quad (\text{XII.11(a) y (b)})$$

$$\delta\phi = \frac{\partial H}{\partial x} + \frac{1}{g} \frac{\partial W}{\partial x} \quad \delta\lambda \operatorname{cos} \phi = \frac{\partial H}{\partial y} + \frac{1}{g} \frac{\partial W}{\partial y} \quad (\text{XII.12(a) y (b)})$$

$$\delta\phi = -\frac{H}{\bar{g}} \frac{\partial \bar{g}}{\partial x} + \frac{g - \bar{g}}{\bar{g}} \tan \beta_1 \quad \delta\lambda \operatorname{cos} \phi = -\frac{H}{\bar{g}} \frac{\partial \bar{g}}{\partial y} + \frac{g - \bar{g}}{\bar{g}} \tan \beta_2 \quad (\text{XII.13(a) y (b)})$$

$$N_B = N_A - \int_A^B \varepsilon \, ds \quad , \quad \varepsilon = \xi \operatorname{cos} \alpha + \eta \operatorname{sen} \alpha \quad (\text{XII.14(a) y (b)})$$

$$N_B - N_A = - \int_A^B \varepsilon \, ds - \int_{B_0}^B \frac{g - \gamma_0}{\gamma_0} \, dn + \frac{\bar{g}_B - \gamma_0}{\gamma_0} H_B - \frac{\bar{g}_A - \gamma_0}{\gamma_0} H_A \quad (\text{XII.15})$$

$$\xi = -\frac{1}{G} \frac{\partial T}{\partial x} \quad ,, \quad \eta = -\frac{1}{G} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (\text{XII.16})$$

$$\begin{aligned} X &= x_0 + (\rho_N + h) \cos \phi \cos \lambda \\ Y &= y_0 + (\rho_N + h) \cos \phi \sin \lambda \\ Z &= z_0 + \left(\frac{b^2}{a^2} \rho_N + h \right) \sin \phi \end{aligned} \quad (\text{XII.17})$$

$$\begin{aligned} \delta X &= \delta x_0 + \frac{\partial X}{\partial a} \delta a + \frac{\partial X}{\partial f} \delta f + \frac{\partial X}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial X}{\partial \lambda} \delta \lambda + \frac{\partial X}{\partial h} \delta h \\ \delta Y &= \delta y_0 + \frac{\partial Y}{\partial a} \delta a + \frac{\partial Y}{\partial f} \delta f + \frac{\partial Y}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial Y}{\partial \lambda} \delta \lambda + \frac{\partial Y}{\partial h} \delta h \\ \delta Z &= \delta z_0 + \frac{\partial Z}{\partial a} \delta a + \frac{\partial Z}{\partial f} \delta f + \frac{\partial Z}{\partial \phi} \delta \phi + \frac{\partial Z}{\partial \lambda} \delta \lambda + \frac{\partial Z}{\partial h} \delta h \end{aligned} \quad (\text{XII.18})$$

$$\begin{aligned} X &= x_0 + (a + af \sin^2 \phi + h) \cos \phi \cos \lambda \\ Y &= y_0 + (a + af \sin^2 \phi + h) \cos \phi \sin \lambda \\ Z &= z_0 + (a - 2af + af \sin^2 \phi + h) \sin \phi \end{aligned} \quad (\text{XII.19})$$

$$\begin{aligned} \delta X &= \delta x_0 - a \sin \phi \cos \lambda \delta \phi - a \cos \phi \sin \lambda \delta \lambda + \cos \phi \cos \lambda (\delta h + \delta a + a \sin^2 \phi \delta f) \\ \delta Y &= \delta y_0 - a \sin \phi \sin \lambda \delta \phi + a \cos \phi \cos \lambda \delta \lambda + \cos \phi \sin \lambda (\delta h + \delta a + a \sin^2 \phi \delta f) \\ \delta Z &= \delta z_0 + a \cos \phi \delta \phi + \sin \phi (\delta h + \delta a + a \sin^2 \phi \delta f) - 2a \sin \phi \delta f \end{aligned} \quad (\text{XII.20})$$

$$\begin{aligned} a \delta \phi &= \sin \phi \cos \lambda \delta x_0 + \sin \phi \sin \lambda \delta y_0 - \cos \phi \delta z_0 + 2a \sin \phi \cos \phi \delta f \\ a \cos \phi \delta \lambda &= \sin \lambda \delta x_0 - \cos \lambda \delta y_0 \\ \delta h &= -\cos \phi \cos \lambda \delta x_0 - \cos \phi \sin \lambda \delta y_0 - \sin \phi \delta z_0 - \delta a + a^2 \sin^2 \phi \delta f \end{aligned} \quad (\text{XII.21})$$

$$\begin{aligned}
\delta x_0 &= a \operatorname{sen} \phi_1 \cos \lambda_1 \delta \phi_1 + a \cos \phi_1 \operatorname{sen} \lambda_1 \delta \lambda_1 - \cos \phi_1 \cos \lambda_1 (\delta h_1 + \delta a + a \operatorname{sen}^2 \phi_1 \delta f) \\
\delta y_0 &= a \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \lambda_1 \delta \phi_1 - a \cos \phi_1 \cos \lambda_1 \delta \lambda_1 - \cos \phi_1 \operatorname{sen} \lambda_1 (\delta h_1 + \delta a + a \operatorname{sen}^2 \phi_1 \delta f) \\
\delta z_0 &= -a \cos \phi_1 \delta \phi_1 - \operatorname{sen} \phi_1 (\delta h_1 + \delta a + a \operatorname{sen}^2 \phi_1 \delta f) + 2a \operatorname{sen} \phi_1 \delta f
\end{aligned}
\tag{XII.22}$$

$$\begin{aligned}
\delta \phi &= (\cos \phi_1 \cos \phi + \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi \cos \Delta \lambda) \delta \phi_1 - \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \Delta \lambda \cos \phi_1 \delta \lambda_1 \\
&\quad + (\operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi - \cos \phi_1 \operatorname{sen} \phi \cos \Delta \lambda) \left(\frac{\delta h_1}{a} + \frac{\delta a}{a} + \operatorname{sen}^2 \phi_1 \delta f \right) \\
&\quad + 2 \cos \phi (\operatorname{sen} \phi - \operatorname{sen} \phi_1) \delta f \\
\cos \phi \delta \lambda &= \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \Delta \lambda \delta \phi_1 + \cos \phi_1 \cos \Delta \lambda \delta \lambda_1 - \cos \phi_1 \operatorname{sen} \Delta \lambda \left(\frac{\delta h_1}{a} + \frac{\delta a}{a} + \operatorname{sen}^2 \phi_1 \delta f \right) \\
\frac{\delta h}{a} &= (\cos \phi_1 \operatorname{sen} \phi - \operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi \cos \Delta \lambda) \delta \phi_1 + \cos \phi \operatorname{sen} \Delta \lambda \cos \phi_1 \delta \lambda_1 \\
&\quad + (\operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi + \cos \phi_1 \cos \phi \cos \Delta \lambda) \left(\frac{\delta h_1}{a} + \frac{\delta a}{a} + \operatorname{sen}^2 \phi_1 \delta f \right) - \frac{\delta a}{a} \\
&\quad + (\operatorname{sen}^2 \phi - 2 \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi) \delta f
\end{aligned}
\tag{XII.23}$$

$$\begin{aligned}
\delta \xi &= (\cos \phi_1 \cos \phi + \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi \cos \Delta \lambda) \delta \xi_1 - \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \Delta \lambda \delta \eta_1 \\
&\quad - (\operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi - \cos \phi_1 \operatorname{sen} \phi \cos \Delta \lambda) \left(\frac{\delta N_1}{a} + \frac{\delta a}{a} + \operatorname{sen}^2 \phi_1 \delta f \right) \\
&\quad - 2 \cos \phi (\operatorname{sen} \phi - \operatorname{sen} \phi_1) \delta f \\
\delta \eta &= \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \Delta \lambda \delta \xi_1 + \cos \Delta \lambda \delta \eta_1 + \cos \phi_1 \operatorname{sen} \Delta \lambda \left(\frac{\delta N_1}{a} + \frac{\delta a}{a} + \operatorname{sen}^2 \phi_1 \delta f \right) \\
\frac{\delta N}{a} &= -(\cos \phi_1 \operatorname{sen} \phi - \operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi \cos \Delta \lambda) \delta \xi_1 - \cos \phi \operatorname{sen} \Delta \lambda \delta \eta_1 \\
&\quad + (\operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi + \cos \phi_1 \cos \phi \cos \Delta \lambda) \left(\frac{\delta N_1}{a} + \frac{\delta a}{a} + \operatorname{sen}^2 \phi_1 \delta f \right) - \frac{\delta a}{a} \\
&\quad + (\operatorname{sen}^2 \phi - 2 \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi) \delta f
\end{aligned}
\tag{XII.24}$$

$$\begin{aligned}
\xi &= \xi' + (\cos \phi_1 \cos \phi + \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi \cos \Delta \lambda) \delta \xi_1 - \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \Delta \lambda \delta \eta_1 \\
&\quad - (\operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi - \cos \phi_1 \operatorname{sen} \phi \cos \Delta \lambda) \frac{\delta N_1}{a} - 2 \cos \phi (\operatorname{sen} \phi - \operatorname{sen} \phi_1) \delta f \\
\eta &= \eta' + \operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \Delta \lambda \delta \xi_1 + \cos \Delta \lambda \delta \eta_1 + \cos \phi_1 \operatorname{sen} \Delta \lambda \frac{\delta N_1}{a}
\end{aligned}
\tag{XII.25}$$

$$\sum \left[(\xi^a - \xi^g)^2 + (\eta^a - \eta^g)^2 \right] = \text{mínimo} \quad (\text{XII.26})$$

$$N_0 = N'_1 + \delta N_1 - \frac{R}{4\pi G} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (\text{XII.27(a)})$$

$$\begin{aligned} N = N' - (\cos \phi_1 \operatorname{sen} \phi - \operatorname{sen} \phi_1 \cos \phi \cos \Delta \lambda) a \delta \xi_1 - \cos \phi \operatorname{sen} \Delta \lambda a \delta \eta_1 \\ + (\operatorname{sen} \phi_1 \operatorname{sen} \phi + \cos \phi_1 \cos \phi \cos \Delta \lambda) \delta N_1 \end{aligned} \quad (\text{XII.27(b)})$$

$$\sum (N^a - N^g)^2 = \text{mínimo} \quad (\text{XII.28})$$

$$N' = \underbrace{N_0 + N_{St}}_N + \cos \phi \cos \lambda \delta x_0 + \cos \phi \operatorname{sen} \lambda \delta y_0 + \operatorname{sen} \phi \delta z_0$$

$$N_{St} = \frac{R}{4\pi G} \iint_{\sigma} \Delta g S(\psi) d\sigma \quad (\text{XII.29(a) y (b)})$$

$$\xi' = \xi + \frac{1}{R} (\operatorname{sen} \phi \cos \lambda \delta x_0 + \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \lambda \delta y_0 - \cos \phi \delta z_0)$$

$$\eta' = \eta + \frac{1}{R} (\operatorname{sen} \lambda \delta x_0 - \cos \lambda \delta y_0) \quad (\text{XII.30})$$

$$\xi^a - \xi^g = \xi' - \xi - \frac{1}{R} (\operatorname{sen} \phi \cos \lambda \delta x_0 + \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \lambda \delta y_0 - \cos \phi \delta z_0)$$

$$\eta^a - \eta^g = \eta' - \eta - \frac{1}{R} (\operatorname{sen} \lambda \delta x_0 - \cos \lambda \delta y_0)$$

$$N^a - N^g = N' - N_{St} - \cos \phi \cos \lambda \delta x_0 - \cos \phi \operatorname{sen} \lambda \delta y_0 - \operatorname{sen} \phi \delta z_0 - N_0 \quad (\text{XII.31})$$

$$\iint_{\sigma} N^2 d\sigma = \text{mínimo} \quad (\text{XII.32})$$

$$\iint_{\sigma} (\xi^2 + \eta^2) d\sigma = \text{mínimo} \quad (\text{XII.33})$$

$$\sum (\xi^2 + \eta^2) d\sigma = \text{mínimo} \quad (\text{XII.34})$$

$$\iint_{\sigma} (\Delta g)^2 d\sigma = \text{mínimo} \quad (\text{XII.35})$$

$$T = \frac{k\delta M}{R} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [a_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + b_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)] \quad (\text{XII.36})$$

$$N = \frac{k\delta M}{RG} - \frac{\delta W}{G} + \frac{1}{G} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [a_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + b_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)] \quad (\text{XII.37})$$

$$\Delta g = -\frac{k\delta M}{R^2} + \frac{2\delta W}{R} + \frac{1}{R} \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{m=0}^n [(n-1)a_{nm} R_{nm}(\theta, \lambda) + (n-1)b_{nm} S_{nm}(\theta, \lambda)] \quad (\text{XII.38})$$

$$\iint_{\sigma} N^2 d\sigma = \frac{4\pi}{G^2} \delta W^2 + \frac{4\pi}{G^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n+1} \left[a_{n0}^2 + \sum_{m=1}^n \frac{(n+m)!}{2(n-m)!} (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) \right] \quad (\text{XII.39})$$

$$\iint_{\sigma} (\Delta g)^2 d\sigma = \frac{16\pi}{R^2} \delta W^2 + \frac{4\pi}{R^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)^2}{2n+1} \left[a_{n0}^2 + \sum_{m=1}^n \frac{(n+m)!}{2(n-m)!} (a_{nm}^2 + b_{nm}^2) \right] \quad (\text{XII.40})$$

$$\bar{n} = \begin{pmatrix} \cos \Phi \cos \Lambda \\ \cos \Phi \operatorname{sen} \Lambda \\ \operatorname{sen} \Phi \end{pmatrix} \quad (\text{XII.41(a)})$$

$$\bar{e}' = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \Phi \cos \Lambda \\ -\operatorname{sen} \Phi \operatorname{sen} \Lambda \\ \cos \Phi \end{pmatrix} \quad (\text{XII.41(b)})$$

$$\bar{e}'' = \begin{pmatrix} -\operatorname{sen} \Lambda \\ \cos \Lambda \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{XII.41(c)})$$

$$A = \tan^{-1} \frac{-\Delta X \operatorname{sen} \Lambda + \Delta Y \cos \Lambda}{-\Delta X \operatorname{sen} \Phi \cos \Lambda - \Delta Y \operatorname{sen} \Phi \operatorname{sen} \Lambda + \Delta Z \cos \Phi}$$

$$z' = \cos^{-1} \frac{\Delta X \cos \Phi \cos \Lambda + \Delta Y \cos \Phi \operatorname{sen} \Lambda + \Delta Z \operatorname{sen} \Phi}{s}$$

$$s = \sqrt{\Delta X^2 + \Delta Y^2 + \Delta Z^2} \quad (\text{XII.42})$$

$$\delta A = k_1 \delta X_P + k_2 \delta Y_P + k_3 \delta Z_P + k_4 \delta X_Q + k_5 \delta Y_Q + k_6 \delta Z_Q + k_7 \delta \Phi_P + k_8 \delta \Lambda_P$$

$$k_1 = \frac{\partial A}{\partial X_P}, \dots, k_8 = \frac{\partial A}{\partial \Lambda_P} \quad (\text{XII.43(a) y (b)})$$

$$\begin{aligned} \delta X &= -R \operatorname{sen} \phi \cos \lambda \delta \phi - R \cos \phi \operatorname{sen} \lambda \delta \lambda + \cos \phi \cos \lambda \delta h \\ \delta Y &= -R \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \lambda \delta \phi + R \cos \phi \cos \lambda \delta \lambda + \cos \phi \operatorname{sen} \lambda \delta h \\ \delta Z &= R \cos \phi \delta \phi + \operatorname{sen} \phi \delta h \end{aligned} \quad (\text{XII.44})$$

$$\begin{aligned} \delta A &= a_1 \delta \phi_P + a_2 \delta \lambda_P + a_3 \delta h_P + a_4 \delta \phi_Q + a_5 \delta \lambda_Q + a_6 \delta h_Q + a_7 \delta \Phi_P + a_8 \delta \Lambda_P \\ \delta z' &= b_1 \delta \phi_P + b_2 \delta \lambda_P + b_3 \delta h_P + b_4 \delta \phi_Q + b_5 \delta \lambda_Q + b_6 \delta h_Q + b_7 \delta \Phi_P + b_8 \delta \Lambda_P \\ \delta s &= c_1 \delta \phi_P + c_2 \delta \lambda_P + c_3 \delta h_P + c_4 \delta \phi_Q + c_5 \delta \lambda_Q + c_6 \delta h_Q \end{aligned} \quad (\text{XII.45})$$

(ecuaciones XII.46 en página siguiente)

$$\begin{aligned} \alpha &= A - \xi \operatorname{sen} \alpha \cot z - \eta (\tan \phi - \cos \alpha \cot z) \\ &= A - \eta \tan \phi - (\xi \operatorname{sen} \alpha - \eta \cos \alpha) \cot z \\ z &= z' + \xi \cos \alpha + \eta \operatorname{sen} \alpha \end{aligned} \quad (\text{XII.47})$$

$$a_1 = \frac{R \operatorname{sen} \alpha}{s \operatorname{sen} z}, \quad a_2 = -\frac{R \cos \alpha}{s \operatorname{sen} z} \cos \phi, \quad a_3 = 0,$$

$$a_4 = -\frac{R \operatorname{sen} \alpha}{s \operatorname{sen} z} [\cos(\phi_q - \phi) + \operatorname{sen} \phi_q \operatorname{sen} \Delta\lambda \cot \alpha],$$

$$a_5 = \frac{R \cos \alpha \cos \phi_q}{s \operatorname{sen} z} (\cos \Delta\lambda - \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \Delta\lambda \tan \alpha),$$

$$a_6 = \frac{\cos \alpha \cos \phi_q}{s \operatorname{sen} z} [\operatorname{sen} \Delta\lambda + (\operatorname{sen} \phi \cos \Delta\lambda - \cos \phi \tan \phi_q) \tan \alpha],$$

$$a_7 = \operatorname{sen} \alpha \cot z, \quad a_8 = \operatorname{sen} \phi - \cos \alpha \cos \phi \cot z;$$

$$b_1 = -\frac{R}{s} \cos z \cos \alpha, \quad b_2 = -\frac{R}{s} \cos z \operatorname{sen} \alpha \cos \phi, \quad b_3 = \frac{1}{s} \operatorname{sen} z,$$

$$b_4 = \frac{R}{s \operatorname{sen} z} (\cos \phi \operatorname{sen} \phi_q \cos \Delta\lambda - \operatorname{sen} \phi \cos \phi_q - \cos z \operatorname{sen} z_q \cos \alpha_q),$$

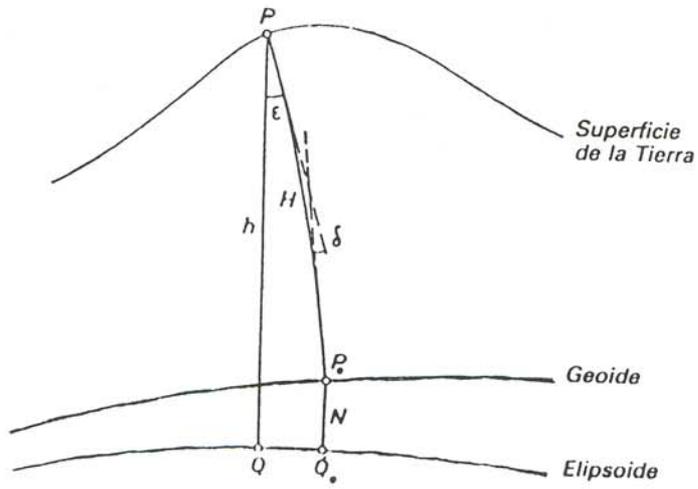
$$b_5 = \frac{R \cos \phi_q}{s \operatorname{sen} z} (\cos \phi \operatorname{sen} \Delta\lambda - \cos z \operatorname{sen} z_q \operatorname{sen} \alpha_q),$$

$$b_6 = -\frac{1}{s \operatorname{sen} z} (\cos z \cos z_q + \operatorname{sen} \phi \operatorname{sen} \phi_q + \cos \phi \cos \phi_q \cos \Delta\lambda),$$

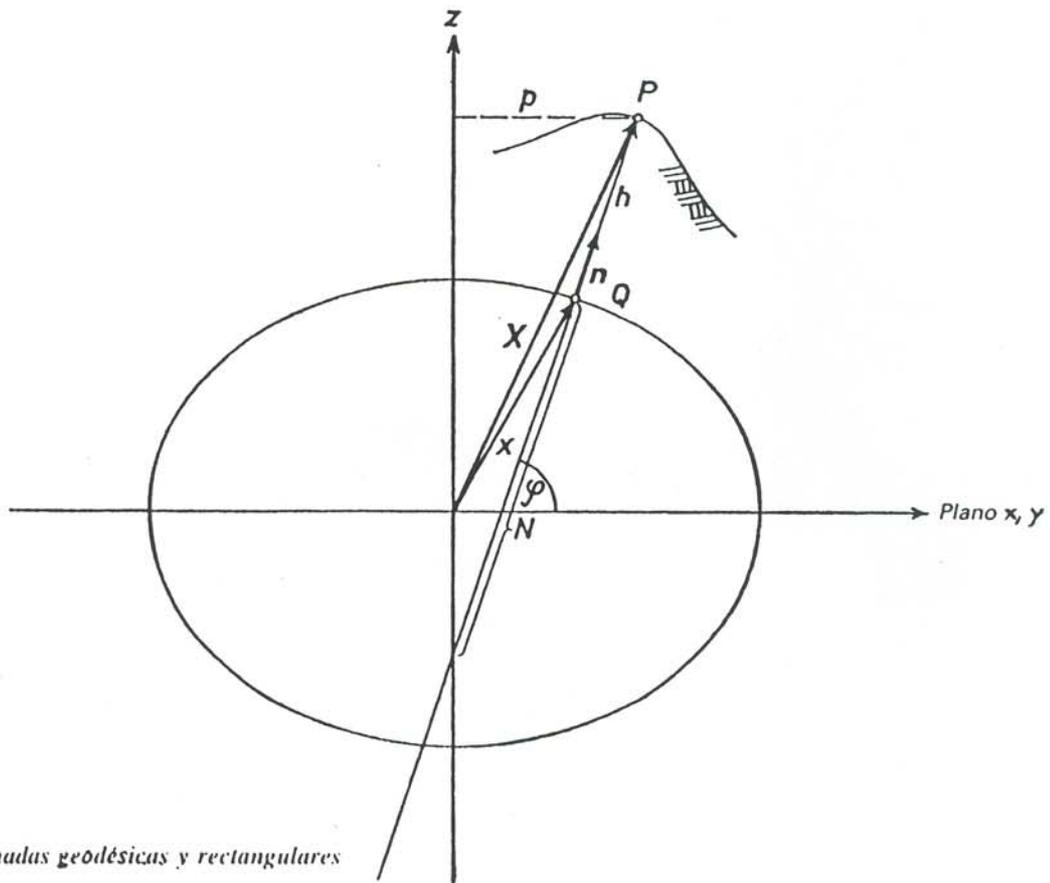
$$b_7 = -\cos \alpha, \quad b_8 = -\cos \phi \operatorname{sen} \alpha;$$

$$c_1 = -R \operatorname{sen} z \cos \alpha, \quad c_2 = -R \cos \phi \operatorname{sen} z \operatorname{sen} \alpha, \quad c_3 = -\cos z,$$

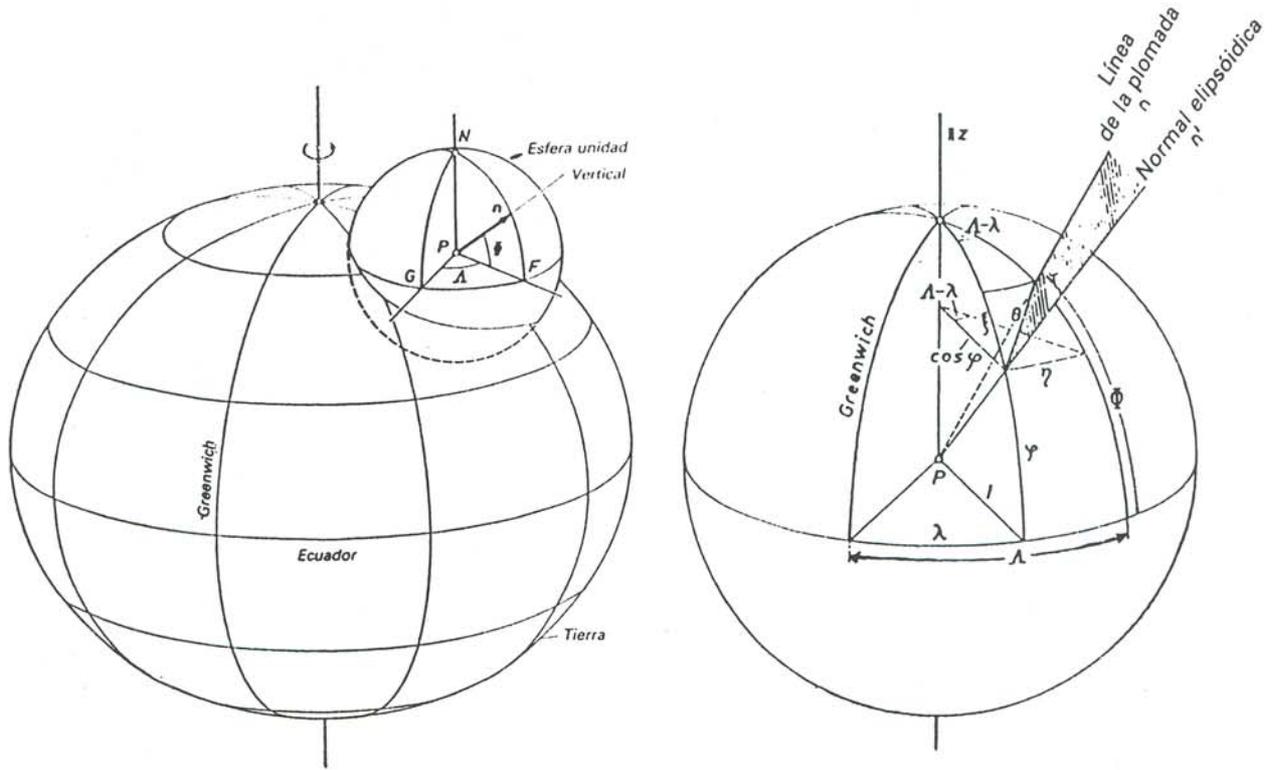
$$c_4 = -R \operatorname{sen} z_q \cos \alpha_q, \quad c_5 = -R \cos \phi_q \operatorname{sen} z_q \operatorname{sen} \alpha_q, \quad c_6 = -\cos z_q.$$



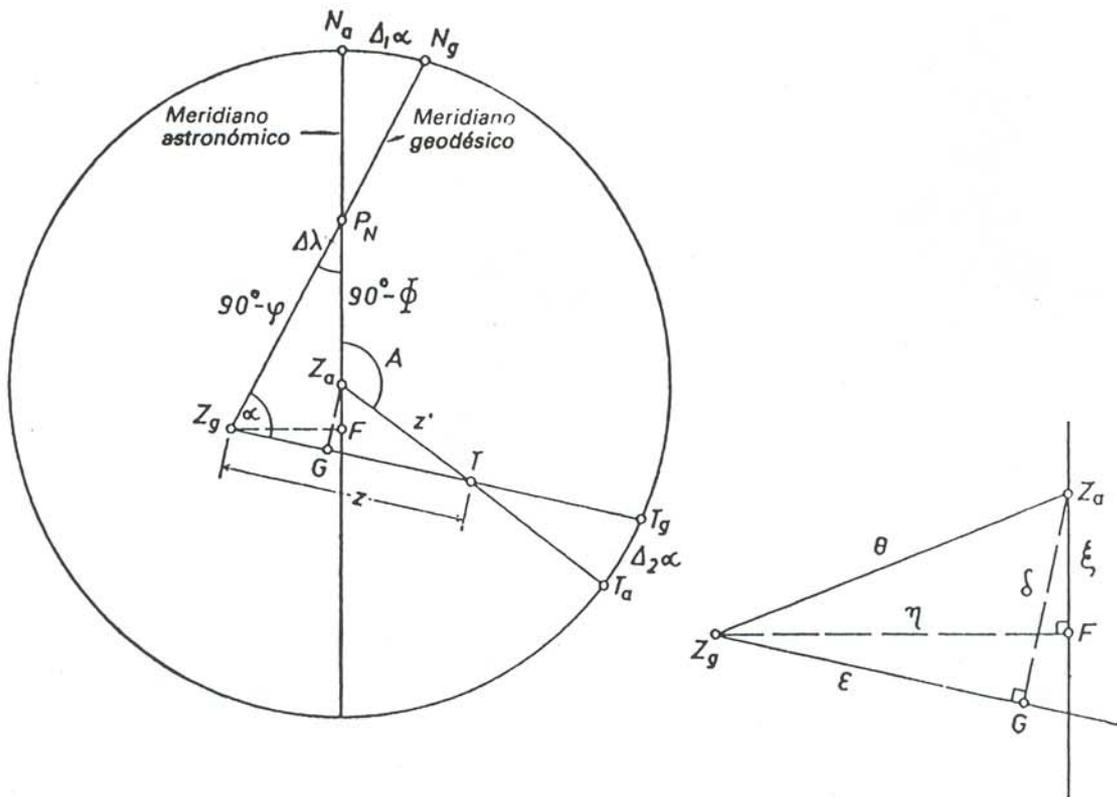
Proyecciones de Helmert y de Pizzetti



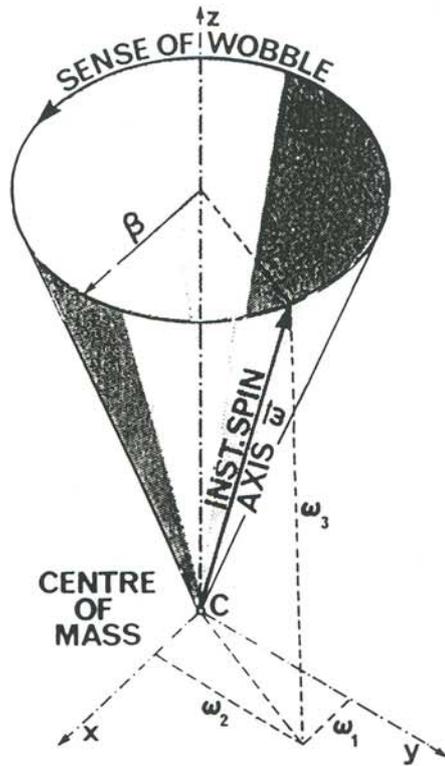
Coordenadas geodésicas y rectangulares



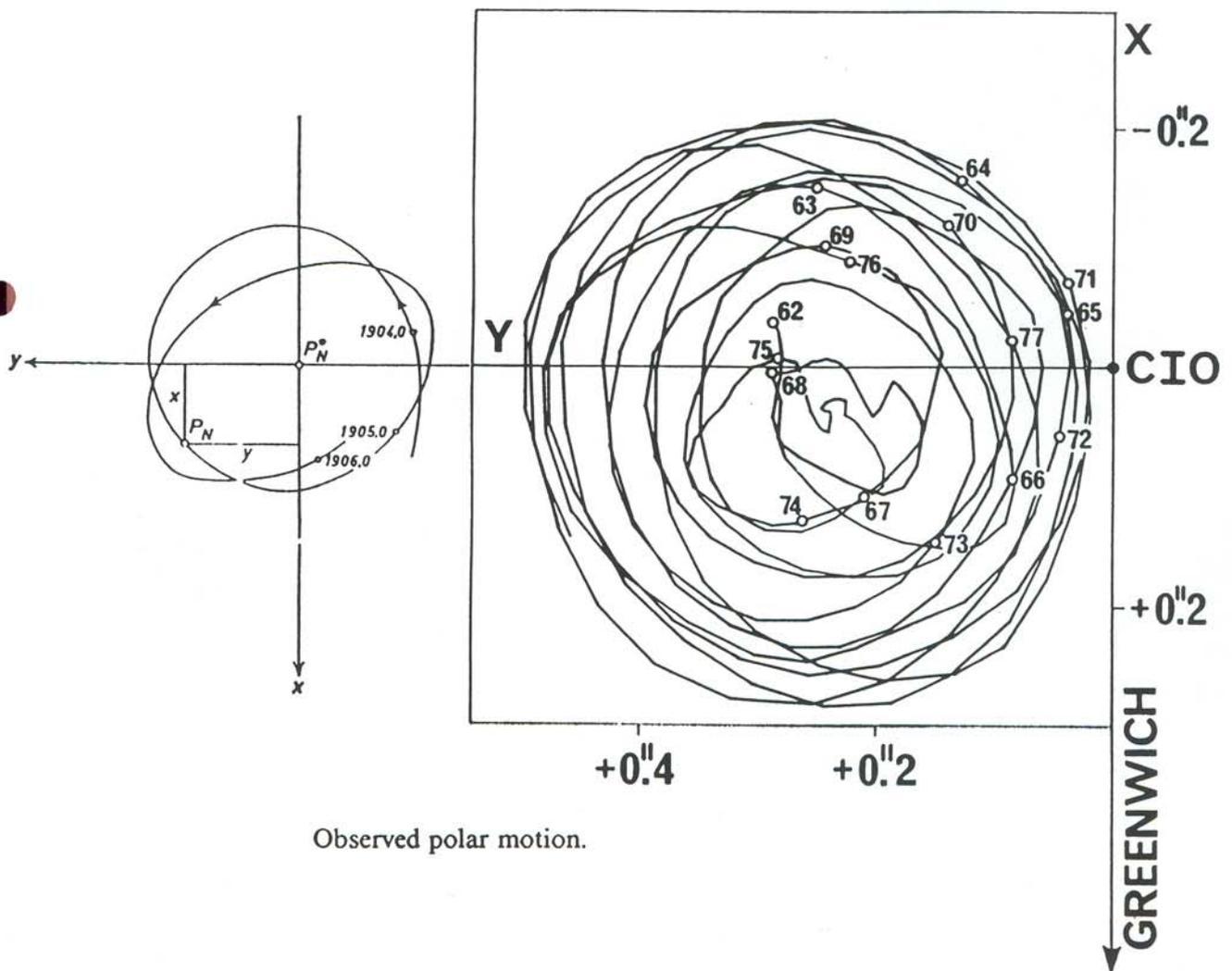
Desviación de la vertical explicada por medio de una esfera unitaria con centro en P



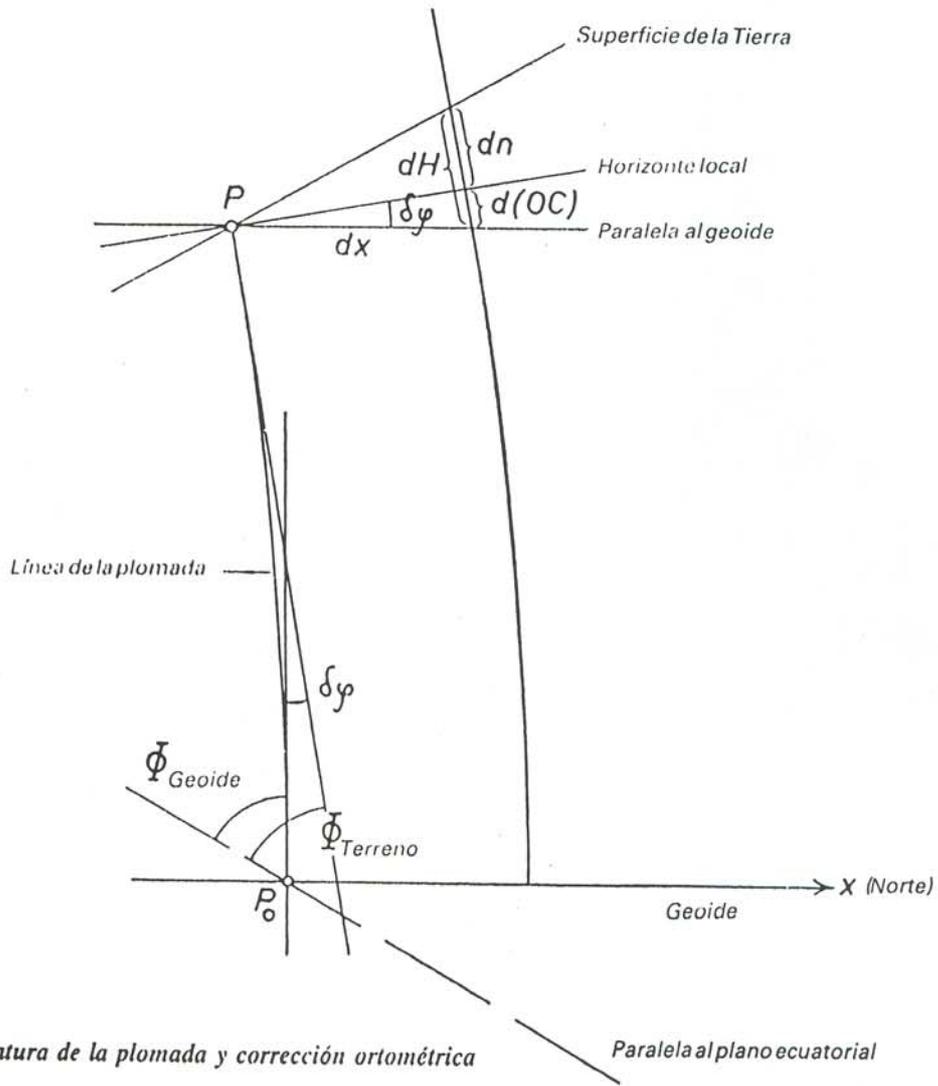
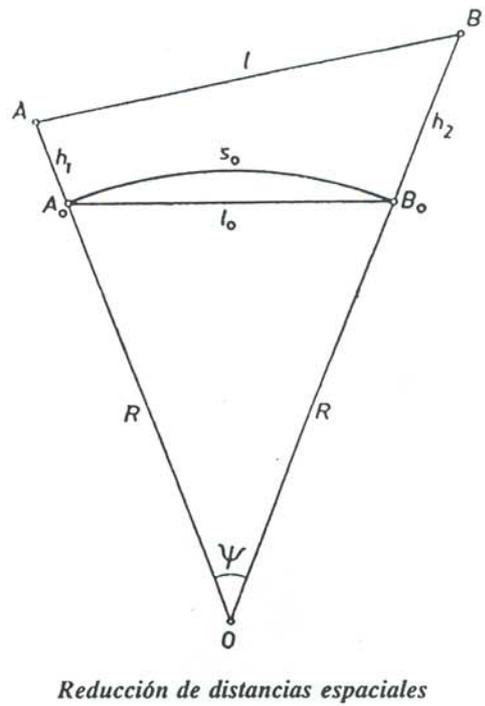
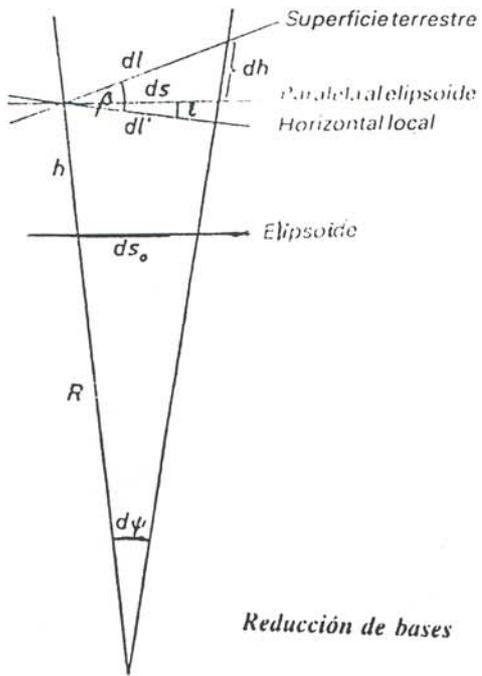
Esfera unitaria que ilustra la desviación de la vertical, vista desde arriba, y una vista ampliada de la parte central de la figura

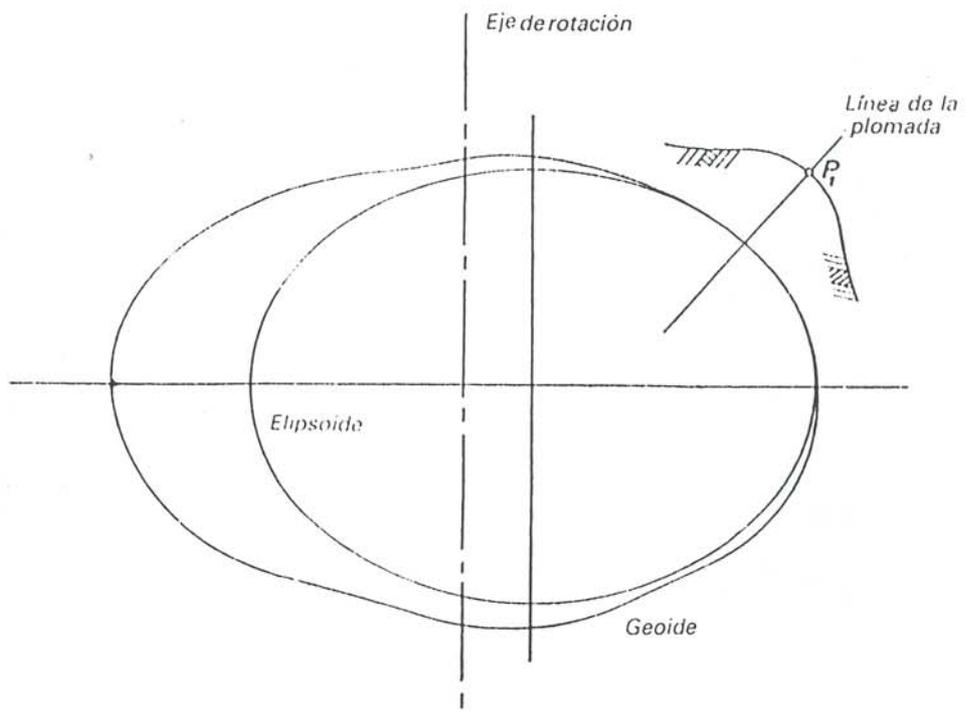


Instantaneous spin axis in geocentric natural coordinate system.

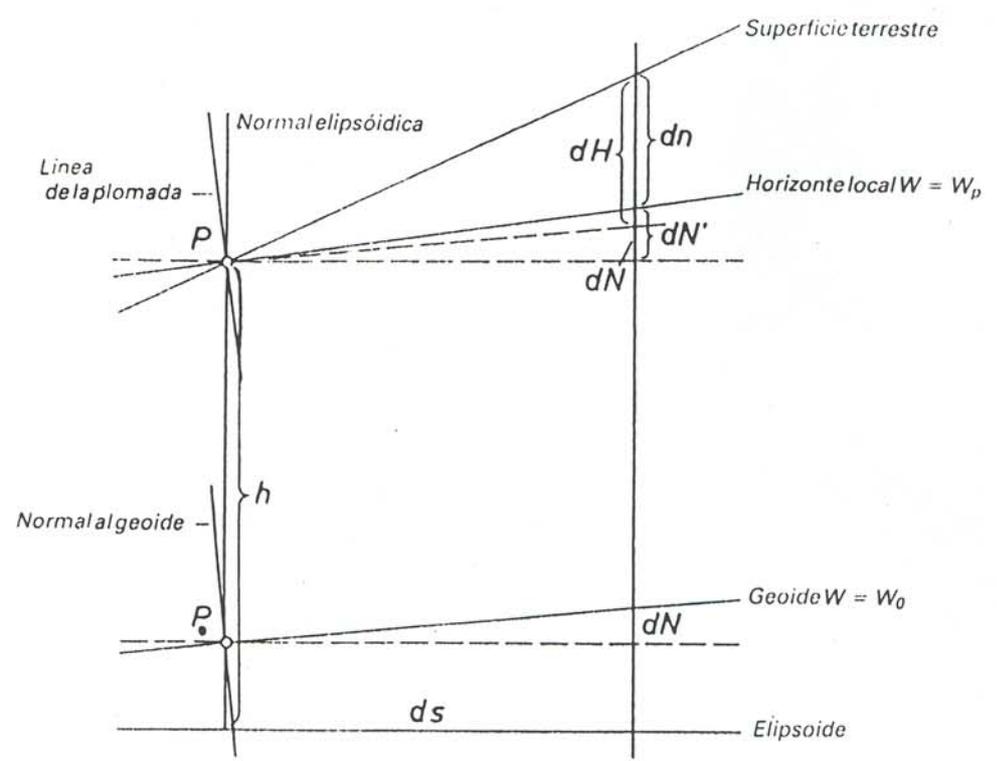


Observed polar motion.

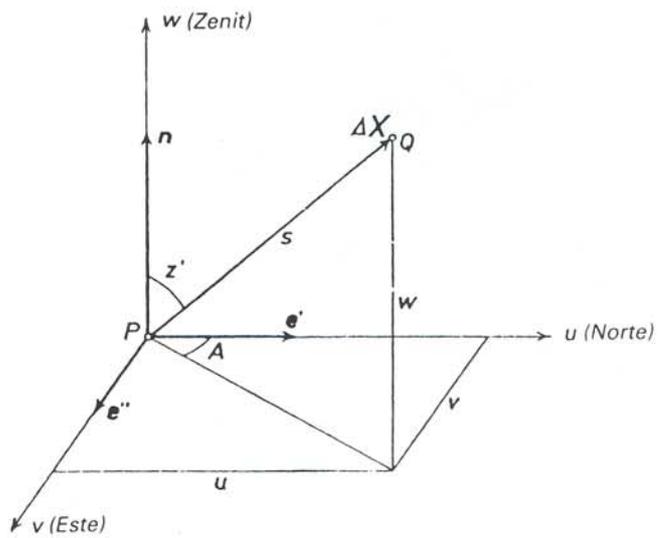
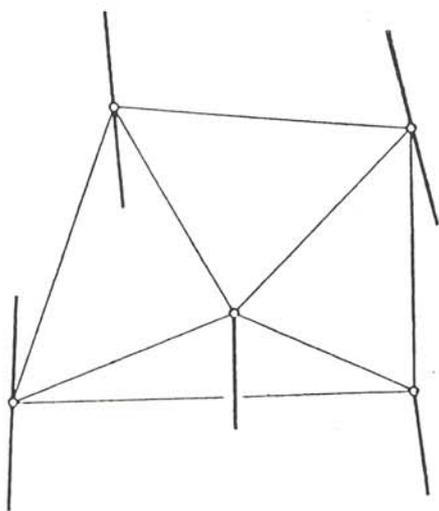
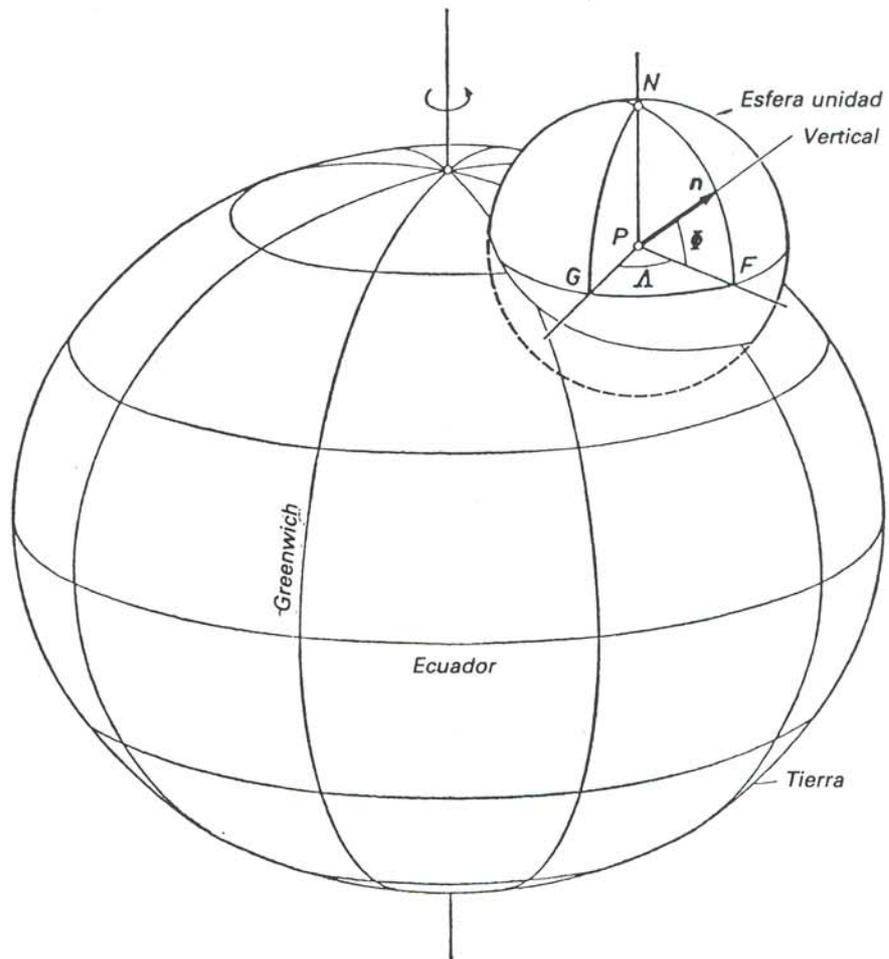




El elipsoide de referencia es tangente al geoide en P_1



Reducción de nivelación astronómica



Capítulo XII. Métodos astrogeodésicos y geodesia tridimensional.

XII.1. Proyecciones sobre el elipsoide.

En los capítulos anteriores dedicados a la Geodesia Física, pudimos comprobar que la Geodesia, como teoría de la forma y figura de la Tierra (dimensiones de la Tierra), no es una ciencia puramente geométrica, ya que, el campo de gravedad terrestre, una cantidad física, está involucrado en la mayoría de las medidas geodésicas, incluso en las puramente geométricas (como son las medidas de triangulación y de nivelación) por ser la dirección del vector gravedad, la cantidad usada para definir la línea de la plomada.

Por ello, los métodos astrogeodésicos que a continuación vamos a presentar, por utilizar la línea de la plomada en la determinación de latitud, longitud y acimut (así como, las operaciones de triangulación), pueden considerarse pertenecientes a la Geodesia Física, tanto como los métodos gravimétricos.

No obstante, como diferencia general, los métodos astrogeodésicos utilizan la dirección del vector gravedad, empleando técnicas geométricas, mientras que los métodos gravimétricos, como ya hemos visto, emplean la magnitud g , haciendo

uso de la teoría del potencial. Así, los métodos gravimétricos se consideran, ordinariamente, como constituyentes de la geodesia física, en sentido restringido.

A lo largo de este capítulo estudiaremos los métodos astrogeodésicos, viendo que estos métodos y los gravimétricos son complementarios.

Comenzaremos por establecer un sistema de coordenadas adecuado, para referir la posición de un punto P sobre la superficie terrestre. Podemos utilizar un sistema de coordenadas cartesianas, pero en muchos casos es preferible considerar las coordenadas que hemos llamado naturales:

Φ = Latitud geográfica, determinada por medidas astronómicas.

Δ = Longitud geográfica, determinada por medidas astronómicas.

H = Altitud ortométrica, medida desde el geoide a lo largo de la línea de la plomada. Puede hallarse como se indicó el seminario S.III, dedicado a la nivelación de altitudes.

Cuando identificamos el geoide con el elipsoide de referencia usado, el uso de estas coordenadas para los cálculos es muy sencillo. Pero sucede que para obtener resultados de alta precisión, debe considerarse la diferencia que existe entre el geoide y el elipsoide de referencia.

Por esta razón debemos añadir a las coordenadas (Φ, Λ, H) , las pequeñas diferencias que existen entre el geoide y un elipsoide, de modo que se obtengan valores que estén realmente referidos a un elipsoide. En el apartado denominado "reducción de observaciones astronómicas al elipsoide", obtendremos la relación:

$$\begin{array}{l} \phi = \Phi - \xi \\ \lambda = \Lambda - \eta \sec \phi \\ h = H + N \end{array} \quad \text{ec. VIII.1}$$

donde (ϕ, λ, h) son las conocidas latitud geodésica y longitud geodésica, siendo "h" la altitud geométrica, medida desde el elipsoide considerado, a lo largo de la normal elipsoidal.

Análogamente, reduciremos las medidas de ángulos y distancias, al elipsoide considerado. El cálculo de triang. y trilateraciones sobre un elipsoide es fácil, por ello, es conveniente reducir los ángulos medidos, las bases y las grandes distancias, al elipsoide, de la misma forma que se hace con las coordenadas astronómicas. Concluyendo que las coordenadas geodésicas (ϕ, λ) obtenidas de ambas formas, deben ser iguales entre sí para el mismo punto (se comparan las coordenadas (ϕ, λ) obtenidas por reducción de coordenadas astronómicas, con las calculadas por triangulación o trilateración).

Una vez hemos establecido la posición de un punto P por medio de las coordenadas anteriores, estamos interesados en proyectarlo sobre el geóide, a lo largo de la línea de la plomada, si llamamos a esta proyección P_0 , la distancia PP_0 , medida a lo largo de la línea de la plomada (ver figura en la transp.), es la altitud ortométrica del punto P sobre el geóide. Como el geóide no es una superficie adecuada para realizar cálculos, proyectamos el punto P_0 , según la recta normal al elipsoide, obteniendo así un punto Q_0 . De esta forma el punto P (sobre el terreno), está conectado con Q_0 mediante la doble proyección indicada, en la que $PP_0 = H$ y $P_0Q_0 = N$ (la ondulación del geóide).

A la doble proyección presentada se le llama proyección de Pizzetti.

Mucho más simple que esta proyección, es la proyección de Helmert, la cual consiste en proyectar P sobre el elipsoide, según la recta normal elipsoidal, obteniendo así el punto Q . La distancia $PQ = h$ es la altitud geométrica del punto P ; quedando P determinado por las coordenadas (ϕ, λ, h) , de modo que las coordenadas geodésicas toman el lugar de las coordenadas naturales.

En la práctica, la diferencia que existe entre ambas proyecciones es muy pequeña. Por tanto, podemos considerar que:

$$h = H + N$$

quedando de esta forma demostrada la última relación

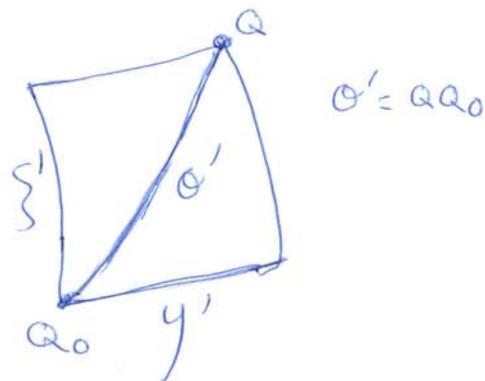
de las ecuaciones XII.1. Además, podemos relacionar las coordenadas geodésicas de ambas proyecciones, mediante:

(ecuaciones XII.2)

Cuadro XII.1. Demostración de las ecuaciones XII.2.

Si consideramos demostradas las ecuaciones XII.1, podemos escribir una relación similar entre las coordenadas del punto Q y las del punto Q_0 :

$$\left. \begin{aligned} \phi_H - \phi_P &= \xi' \\ (\lambda_H - \lambda_P) \cos \phi &= \eta' \end{aligned} \right|$$



pero $\sigma' = QQ_0$ puede escribirse a la vista de la figura en la transparencia, como:

$$\left. \begin{aligned} QQ_0 &= RE' \\ QQ_0 &= HE \end{aligned} \right| \Rightarrow \begin{aligned} E' &= \frac{H}{R} E \\ \xi' &= \xi \frac{H}{R} \\ \eta' &= \eta \frac{H}{R} \end{aligned} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\begin{aligned} \phi_H &= \phi_P + \xi \frac{H}{R} \\ \lambda_H &= \lambda_P + \eta \frac{H}{R} \sec \phi \end{aligned}} \quad (\text{ec XII.2})$$

La proyección de Pizzetti está mejor adaptada al geóide, porque hay una exacta correspondencia entre un punto P_0 del geóide, y un punto Q_0 del elipsoide. En cambio, la proyección de Helwert tiene la ventaja práctica, de la conversión directa de coordenadas (ϕ, λ, h) elipsóidicas, en

coordenadas rectangulares (x, y, z) . No obstante, comprobada la similitud entre ambas proyecciones, utilizaremos para calcular, la proyección de Helmert, siendo los resultados obtenidos prácticamente válidos para ambas proyecciones. Finalmente, debemos considerar el pequeño ángulo δ , debido a la curvatura de la línea de la plomada, ya que, un cambio de $1''$ de arco en la latitud geográfica implica un desplazamiento lineal de $R\delta \approx 30\text{m}$, en la posición del punto P_0 . Esto debe tenerse en cuenta si combinamos medidas astronómicas (Φ, Λ) , en el punto P del terreno, con desviaciones de la vertical (ξ, η) , obtenidas mediante la fórmula de Vening Meinesz (para el punto P_0).

XII.2. Proyección de Helmert. Coordenadas geodésicas y rectangulares.

El objetivo de este apartado, es deducir la relación que existe entre las coordenadas geodésicas (φ, λ, h) y las correspondientes coordenadas rectangulares (x, y, z) .

Para ello, sabemos que la ecuación de un elipsoide de revolución, en coordenadas cartesianas, es:

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1$$

Recordando también que (Capítulo V) las siguientes ecuaciones, nos relacionan (x, y, z) con (φ, λ) :

(ecuaciones XII.3 (a), (b) y (c))

donde P_N es el radio principal de curvatura E-W.

Así, cuando consideramos las coordenadas de un punto P, fuera del elipsoide (ver figura en la transparencia), podemos escribir:

$$\begin{array}{l} \vec{x} = (x, y, z) \\ \vec{X} = \vec{x} + h \vec{n} \end{array} \left| \Rightarrow \text{(ecuaciones XII.4.(a) y (b))} \right.$$

Las ecuaciones XII.4(b) son las fórmulas básicas de transform. entre las coordenadas (ϕ, λ, h) y (X, Y, Z) , para un punto P fuera del elipsoide. Debemos notar que la obtención de las coordenadas (ϕ, λ, h) a partir de las coordenadas (X, Y, Z) , es más complejo que el proceso contrario; el cálculo debe hacerse de forma iterativa. Una forma de llevar a cabo este proceso iterativo es la siguiente:

→ Obtener ϕ y h , resolviendo:

(ecuación XII.5)

tomando como primera aproximación $h=0$, entonces ϕ^1 será:

$$\tan \phi^1 = \frac{Z_1}{P} (1 - e^2)^{-1}$$

calculamos un valor aproximado de P_N mediante la ecuación XII.3(b), con este valor P_N^1 obtenemos h^1 mediante:

$$h = \frac{P}{\cos \phi} - P_N$$

con este nuevo valor de "h" se procede a la iteración del proceso indicado, hasta que ϕ y h queden prácticamente constantes de una iteración a otra. Conocidos los valores de ϕ y h, podemos obtener λ mediante la primera de las ecuaciones XII.4(b).

Cuadro XII.2. Demostración de la ecuación XII.5.

Designando por p la cantidad:

$$\sqrt{x^2 + y^2} = p \quad (\text{XII.4(b)} \text{ a } 1^{\text{a}} \text{ y } 2^{\text{a}} \text{ al cuadrado con } p^2)$$

tenemos que:

$$p = (P_N + h) \cos \phi \Rightarrow h = \frac{p}{\cos \phi} - P_N$$

pero además:

$$\begin{aligned} z &= \left(\frac{p^2}{a^2} P_N + h + P_N \frac{a^2}{a^2} - P_N \frac{a^2}{a^2} \right) \sin \phi = \\ &= \left(P_N - \frac{a^2 - b^2}{a^2} P_N + h \right) \sin \phi = (P_N + h - e^2 P_N) \sin \phi \end{aligned}$$

En consecuencia:

$$\frac{z}{p} = \operatorname{tg} \phi \frac{P_N + h - e^2 P_N}{P_N + h} = \operatorname{tg} \phi \left(1 - e^2 \frac{P_N}{P_N + h} \right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\text{ecuación XII.5})$$

Finalmente, recordemos que las coordenadas (ϕ, λ, h) son las coordenadas geodésicas presentadas en el capítulo V, con este mismo nombre.

XII.3. Reducción de observaciones astronómicas al elipsoide.

En este apartado vamos a establecer las relaciones que existen entre las coordenadas naturales (Φ, Δ, H) y las geodésicas (φ, λ, h) . Seguiremos de esta forma la proyección de Helmer. Para conseguir nuestro objetivo, comenzaremos por recordar que en el primer apartado de este capítulo, indicamos:

$$h = H + N$$

ya que, con suficiente aproximación, podemos considerar que la única diferencia entre la altitud ortométrica y geométrica es la ondulación del geoide N . Por tanto, sólo nos queda por relacionar las coordenadas astronómicas (Φ, Δ) y el acimut astronómico A , con las coordenadas geodésicas (φ, λ) y el acimut geodésico α .

En primer lugar, recordemos que en el cuadro X.1 del capítulo X, demostramos las ecuaciones XII.1, empleando una figura similar a la presentada en la transparencia. Aquí trataremos de obtener las mismas relaciones desde un punto de vista diferente. Para ello, consideraremos la figura inferior de la transparencia, en la que tenemos una vista superior de la esfera unidad, presentada en la figura superior. Los puntos z_a y z_g designan el acimut astronómico y geodésico, respectivamente, el punto P_N es la intersección de la dirección del polo norte, con esta esfera unidad, notamos entonces que $\Delta\lambda = \Delta - \lambda$ comparando las figuras. También podemos notar que la línea de luz de la

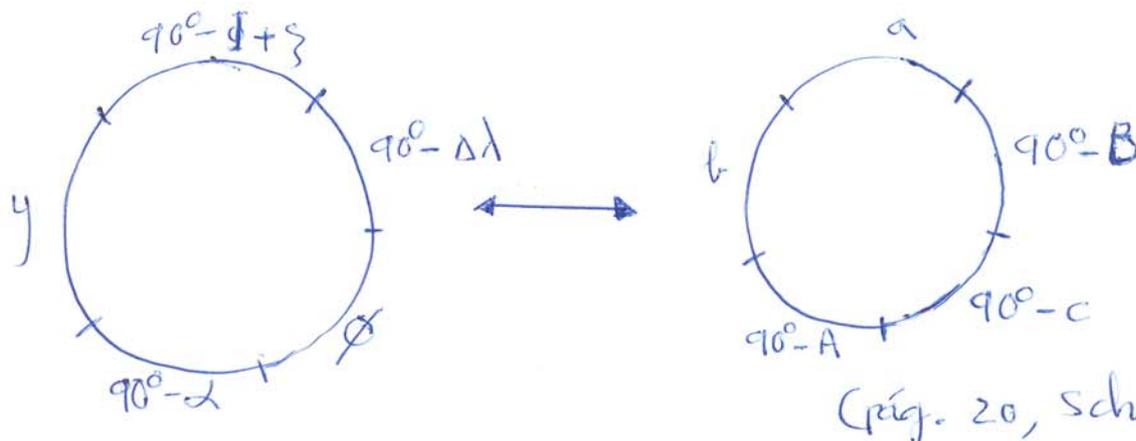
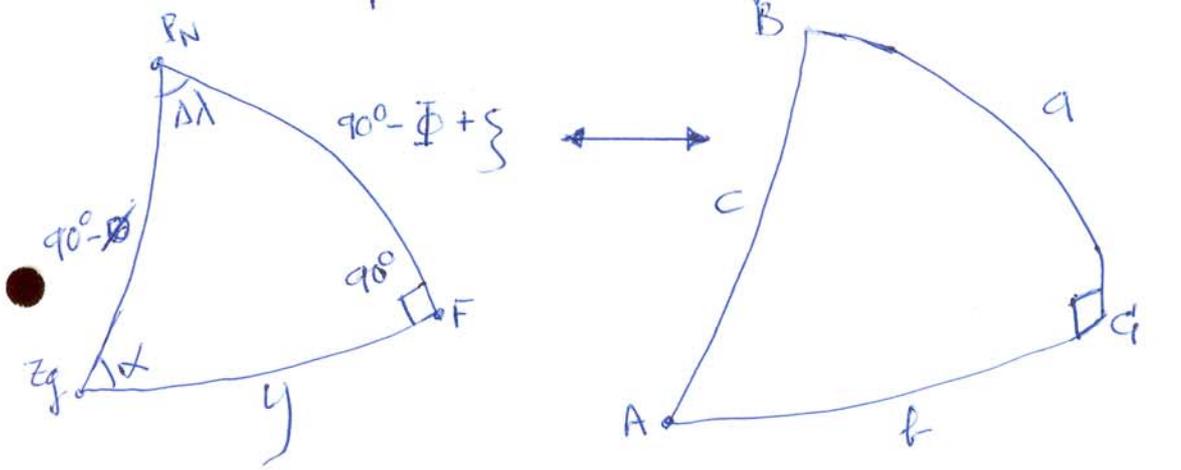
dirección en la que se ha medido el acimut "A", corta a la esfera de radio unidad en el punto T, siendo "x" el ángulo con perpendicular al acimut geodésico.

Para hallar las componentes de la desviación de la vertical, situaremos un punto F, en el "meridiano astronómico" que como sabemos es el plano que contiene los vectores \vec{g}_P^* y \vec{d}_P^* , el corte de este plano con la esfera unidad es el círculo máximo que une P_N y Z_a ; representado en la figura inferior con la línea $P_N - Z_a$; elegiremos F tal que $Z_a F Z_g = 90^\circ$, entonces

● sucede que:

$$\xi = Z_a F \text{ ,, } \eta = Z_g F \text{ (comparar las figuras)}$$

Consideremos primero el triángulo esférico $Z_g F P_N$:



(fig. 20, Schaum)

aplicando ahora las reglas de Napier para triángulos esféricos con un ángulo recto, tenemos que:

$$\operatorname{sen} \phi = \cos(90^\circ - \delta + \xi) \cos y$$

$$\operatorname{sen} y = \cos \phi \cos(90^\circ - \Delta \lambda)$$

para los pequeños ángulos "y" y "Δλ" podemos usar las aproxim.

$$\cos y = 1 \quad \operatorname{sen} y = y \quad \cos(90^\circ - \Delta \lambda) = \operatorname{sen} \Delta \lambda \approx \Delta \lambda$$

entonces:

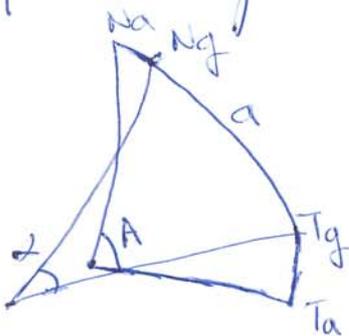
$$\begin{aligned} \operatorname{sen} \phi &= \operatorname{sen}(\Phi - \xi) & \Rightarrow & \quad \phi = \Phi - \xi \Rightarrow \xi = \Phi - \phi \\ y &= \cos \phi (\Delta \lambda) & & \quad \underline{y = (\Delta - \lambda) \cos \phi} \end{aligned}$$

Estas expresiones son precisamente las ecuaciones XIII.1, que aquí hemos obtenido mediante un procedimiento diferente.

Sólo nos queda por relacionar el acimut astronómico A con el acimut geodésico α; para ello, determinaremos Δα = A - α notando que, según la figura de la transparencia, Δα consta de dos partes:

$$\Delta \alpha = \Delta_1 \alpha + \Delta_2 \alpha$$

este resultado puede comprobarse sabiendo que los triángulos Z_gN_gT_g y Z_aN_aT_a, son triángulos esféricos y que los ángulos en N_g y N_a son de 90°; entonces:



(pág. 20, reglas de Napier; Schram)

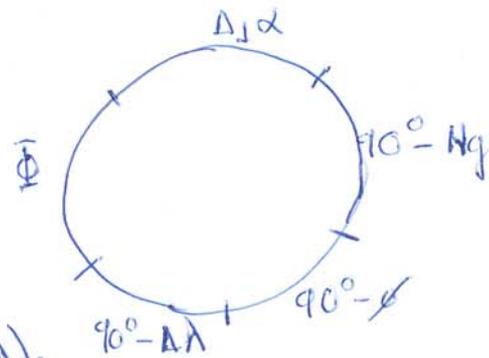
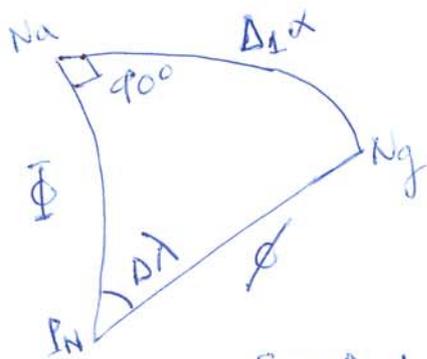
$$\cos \alpha = \cos a (\operatorname{sen} 90^\circ) \quad \text{N}_g \approx 90^\circ$$

$$\cos A = \cos(\alpha + \Delta_1 \alpha + \Delta_2 \alpha) \operatorname{sen} 90^\circ$$

$$\Rightarrow \alpha = a \quad \left| \quad \Rightarrow \quad \underbrace{A - \alpha}_{\Delta \alpha} = \Delta_1 \alpha + \Delta_2 \alpha$$

De esta forma obteniendo $\Delta_1 \alpha$ y $\Delta_2 \alpha$ llegamos al resultado buscado.

$\Delta_1 \alpha$ se obtiene del triángulo esférico $N_a N_g P_N$:



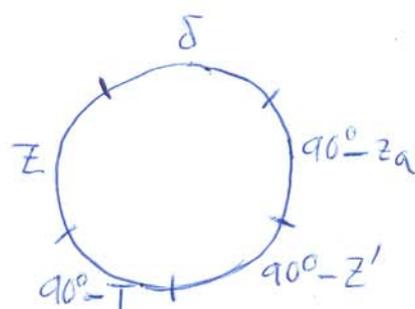
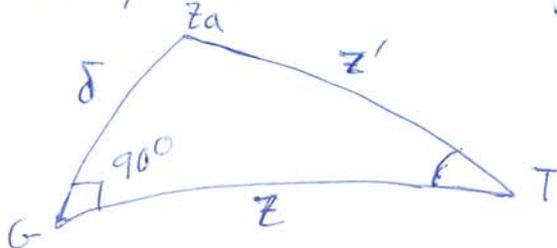
$$\begin{aligned} \text{Sen } \Delta_1 \alpha &= \cos(90^\circ - \Delta \lambda) \cdot \\ &\cdot \cos(90^\circ - \phi) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta_1 \alpha = \text{sen } \Delta \lambda \text{ sen } \phi \Rightarrow \underline{\Delta_1 \alpha = \Delta \lambda \text{ sen } \phi}$$

teniendo en cuenta que $y = \Delta \lambda \cos \phi$, tenemos:

$$\underline{\Delta_1 \alpha = y \text{ tg } \phi}$$

$\Delta_2 \alpha$ se obtiene del triángulo $Z_g T_a T$, notando que al introducir el punto G , definido como un punto sobre el círculo máximo que pasa por Z_g y T , de manera que el ángulo $Z_a G Z_g$ es de 90° ; entonces, tenemos el triángulo:



$$\Rightarrow \text{sen } \delta = \cos(90^\circ - T) \cos(90^\circ - z') = \text{sen } T \text{ sen } z'$$

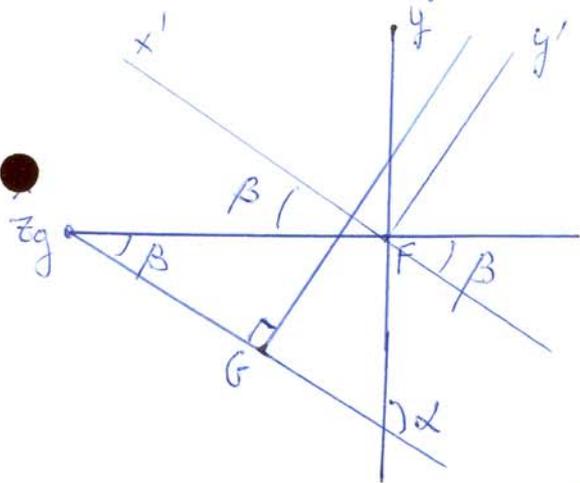
debemos notar también que el triángulo $TTgTa$ es similar al triángulo $PnNaNg$, teniendo:

$$\Delta_2 \alpha = \text{sen } T \cos z \cos(90^\circ - (90^\circ - z))$$

y habida cuenta del resultado anterior:

$$\begin{aligned} \text{sen } T &= \text{sen } \delta / \text{sen } z' \\ \text{sen } T &= \Delta_2 \alpha / \cos z \end{aligned} \quad \left| \begin{array}{l} \Rightarrow \Delta_2 \alpha = \delta \cot z \\ (z \approx z' \\ \text{sen } \delta \approx \delta) \end{array} \right.$$

Para hallar el valor de " δ " consideramos que la pequeña figura $\rightarrow Z_a F Z_g G$, puede considerarse plana, entonces utilizando una fórmula de transformación de coordenadas:



$$90^\circ + \beta = \alpha \Rightarrow \beta = -90^\circ + \alpha$$

$$\delta = z \cos \beta - y \text{sen } \beta = z \text{sen } \alpha + y \cos \alpha$$

(pág. 36; Schaum)

notar que el eje x está cambiado de signo, por tanto:

$$\delta = z \text{sen } \alpha - y \cos \alpha$$

En consecuencia:

$$\Delta_2 \alpha = (z \text{sen } \alpha - y \cos \alpha) \cot z \Rightarrow$$

(ecuación VII.6)

(Consideramos que la dirección $Z_a P_n$ es prácticamente $Z_g P_n$ para el cálculo en la figura plana.)

\Rightarrow

Ordinariamente, para triangulaciones de primer orden, las visuales son casi horizontales, de modo que $z \approx 90^\circ$ y $\cot z \approx 0$, entonces:

$$\Delta x = y \tan \phi = \Delta \lambda \operatorname{sen} \phi$$

Esta ecuación nos recuerda la ec. de Laplace obtenida en el capítulo V, notando cómo están relacionadas las diferencias $A - \alpha$, $\Lambda - \lambda$.

cuadro XII.3. Desviación total de la vertical θ y componente ε .

En la figura plana descrita en este apartado, podemos hallar cantidades que más adelante serán de importancia. En primer lugar, la desviación total de la vertical θ entre la línea de la plomada real y la normal elipsoidal vendrá dada por:

$$\theta = \sqrt{\xi^2 + y^2}$$

En segundo lugar, la componente " ε " de la desviación de la vertical, en la dirección de acimut " α " será:

$$\varepsilon = y \cos \beta + \xi \operatorname{sen} \beta = y \operatorname{sen} \alpha - \xi \cos \alpha = -y \operatorname{sen} \alpha - \xi \cos \alpha$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}$
 eje x
 cambiado
 de signo

(ε es negativo sobre
 la figura plana)

$$\Rightarrow \boxed{\varepsilon = \xi \cos \alpha + y \operatorname{sen} \alpha}$$

Finalmente, podemos escribir las fórmulas de conversión de coordenadas naturales en geodésicas, de la forma:

(ecuaciones XII.7)

En la aplicación de estas fórmulas necesitamos la ondulación del geóide "N" y las componentes (ξ, η) de la desviación de la vertical, con respecto al elipsoide de referencia utilizado; además debemos notar los siguientes aspectos:

1. El eje del elipsoide de referencia es paralelo al eje de rotación de la Tierra, de lo contrario tendríamos dos P_N en las figuras anteriores. No obstante, no se necesita que el centro de este elipsoide coincida con el centro de la Tierra (dicho elipsoide no necesita estar en posición absoluta).
2. Las componentes (ξ, η) de la desviación de la vertical, se refieren al punto P sobre el terreno (el lugar donde se hacen las observaciones astronómicas) y no al geóide. Esto significa que si las componentes (ξ, η) de la desviación de la vertical, se calculan por las fórmulas de Vaníng Meinesz, $(\xi, \lambda, h, \alpha)$ se refieren al elipsoide de referencia utilizado que deberá estar en posición absoluta, considerando además, la curvatura de la línea de la plomada. Este punto se aclarará más en el apartado XII.5.
3. Debemos recordar que la divergencia de las secciones normales recíprocas, debe considerarse para obtener el verdadero acimut "a" de la línea geodésica.

4. El movimiento del polo explicado en el seminario dedicado a los movimientos de la Tierra, producido como consecuencia de que el eje de rotación de la Tierra, no está fijo con respecto a la Tierra, sino que sufre pequeñas variaciones más o menos periódicas. Este movimiento llamado movimiento Chandler, tiene un período de unos 430 días. Como sabemos el ILS (Servicio Internacional de Latitudes), mantenido por la Unión Astronómica Internacional y por la Unión Internacional de Geodesia y Geofísica, observa continuamente la variación de la latitud en varias estaciones, y así determina el movimiento del polo. Esto significa que los valores astronómicamente observados, deben ser corregidos de éste y de otros efectos que no son objetivo de esta asignatura.

XII.4. Reducción de ángulos horizontales y verticales. Reducción de distancias.

Ángulos horizontales.

Para reducir un ángulo horizontal observado $\Delta\alpha$ al elipsoide, debemos notar que éste puede escribirse en la forma:

$$\Delta\alpha = \alpha_2 - \alpha_1 \quad (\text{diferencia de acimutes})$$

por lo tanto, cuando aplicamos la fórmula XII.7(d), el término $y \tan \phi$ es común a ambos acimutes y resulta eliminado.

Así, concluimos que para visuales casi horizontales no será necesaria ninguna reducción.

Ángulos verticales.

La relación entre la distancia cenital medida z' y la correspond. distancia cenital elipsoidal z , puede obtenerse inspeccionando la figura inferior de la transparencia:

$$(ec. \text{XI.8}) \quad z = z' + \varepsilon = z' + \underbrace{\{ \cos \alpha + y \sec \alpha \}}_{\text{cuadro XI.3}}$$

Reducción de Bases.

• Vamos a distinguir la reducción de bases y de distancias espaciales, por el hecho de que las bases son medidas sobre la superficie terrestre y reducidas a tramos al horizonte local, este proceso involucra la dirección de la vertical. En las medidas de distancias espaciales rectas no hay dependencia con la vertical del lugar, por tanto, no contiene esta reducción una dependencia con la desviación de la vertical " ε ".

• La figura superior izquierda de la transparencia, ilustra la reducción de una base medida, al elipsoide de referencia. Designemos con " dl " un elemento de distancia medida sobre la superficie de la Tierra, este elemento tiene una inclinación " β " respecto al horizonte local (superficie geopot. que pasa por el extremo izquierdo de " dl "). La componente de la desviación de la vertical, en la dirección de la línea medida (cuyo acimut será α), será designada como siempre mediante la letra griega " ε ". De esta forma, el elemento " ds " que es la componente de " dl " paralela al elipsoide, será:

$$ds = dl \cos(\beta - \varepsilon) \approx dl \cos \beta + \varepsilon dl \operatorname{sen} \beta \quad (\varepsilon \ll 1)$$

$$(\cos(\beta - \varepsilon) = \underbrace{\cos \beta \cos \varepsilon}_{\approx 1} + \underbrace{\operatorname{sen} \beta \operatorname{sen} \varepsilon}_{\approx \varepsilon})$$

si designamos por dl' la proyección de "dl" sobre el horizonte local, podemos escribir:

$$dl' = dl \cos \beta$$

además $dl \operatorname{sen} \beta \approx dh$, por tanto:

$$ds = dl' + \varepsilon dh$$

Ahora bien, en el capítulo V comprobamos que "R", el radio de curvatura de acimut "α", puede escribirse en la forma:

$$\frac{1}{R} = \frac{\cos^2 \alpha}{P_H} + \frac{\operatorname{sen}^2 \alpha}{P_N}$$

$\left(\begin{array}{l} P_H \equiv \text{radio principal de curvatura NS} \\ P_N \equiv \text{radio principal de curvatura EW} \end{array} \right)$

⇒ conocido α y P_H, P_N tenemos R

entonces, si "ds₀" es la proyección de "dl" sobre el elipsoide, podemos escribir:

$$\begin{array}{l} (d\varphi)R = ds_0 \\ (d\varphi)(R+h) = ds \end{array} \Rightarrow \frac{ds}{R+h} = \frac{ds_0}{R} \Rightarrow \frac{ds}{ds_0} = \frac{R+h}{R} = 1 + \frac{h}{R}$$

$$\Rightarrow ds_0 = ds - \frac{h}{R} ds_0 = \underbrace{dl' + \varepsilon dh}_{ds} - \frac{h}{R} ds_0$$

poniendo $ds_0/R = d\varphi$, tenemos:

$$ds_0 = dl' + \varepsilon dh - h d(\chi + \varepsilon) \quad (\pm h d\varepsilon)$$

$$\Rightarrow s_0 = l' + \varepsilon_B h_B - \varepsilon_A h_A - \int_A^B h d(\chi + \varepsilon)$$

(integrando entre dos puntos A y B)

En los procesos de medida de bases, se eligen superficies de la Tierra que son casi planas, es decir, la altitud "h" permanece casi constante, en esta situación podemos expresar la integral anterior como:

$$- \int_A^B h d(\chi + \varepsilon) = -h_m (\varepsilon_B - \varepsilon_A) - h_m \int_A^B d\chi$$

expresando además $d\chi = ds_0/R$ y considerando que R es prácticamente constante en la integración:

(ecuación XII.9)

donde "h_m" es una altura media a lo largo de la base.

A la vista de la ecuación XII.9 debemos hacer las siguientes observaciones:

1. Debido a que la diferencia h_B o h_A con h_m es generalmente muy pequeña, esta cantidad multiplicada por ε_A o ε_B , suele despreciarse frecuentemente.
2. La reducción rigurosa de bases según la ecuación XII.9, conlleva determinar la oscilación del geide ($h = H - N$) y la desv. ε .

Distancias espaciales.

La medida electrónica de distancias, nos proporciona distancias espaciales rectas " l " entre dos puntos A y B (tal como puede verse en la figura superior derecha de la transparencia). Estas distancias son fundamentales como herramienta de cálculo, o más bien como datos, en la geodesia tridimensional, como más adelante veremos. También pueden reducirse a la superficie del elipsoide para obtener distancias sobre curvas o sobre secciones normales (Las cantidades l_0 y s_0 fueron introducidas en el capítulo VII con los símbolos c y s_{12} ó s_{21}).

La distancia " l " se obtiene directamente con el instrumento de medida, por tanto, sólo es necesario encontrar aquí los valores l_0 y s_0 , como función de " l ", para ello aproximaremos el arco elipsoidal A_0B_0 por un arco circular de radio R , este radio R se define como vimos antes, de esta forma:

$$l^2 = (R+h_1)^2 + (R+h_2)^2 - 2(R+h_1)(R+h_2)\cos\psi$$

(teorema de los cosenos, pág. 19; Schumm)

teniendo en cuenta además que:

$$\cos\psi = 1 - 2\operatorname{sen}^2(\psi/2) \quad (\text{pág. 16; Schumm})$$

podemos escribir:

$$(\text{ecuación XI.10})$$

donde habida cuenta de que:

$$\Delta h = h_1 - h_2 \quad ,, \quad l_0 = 2R \operatorname{sen}(\psi/2)$$

(teorema de los cosenos y pág. 16)

nos permite escribir :

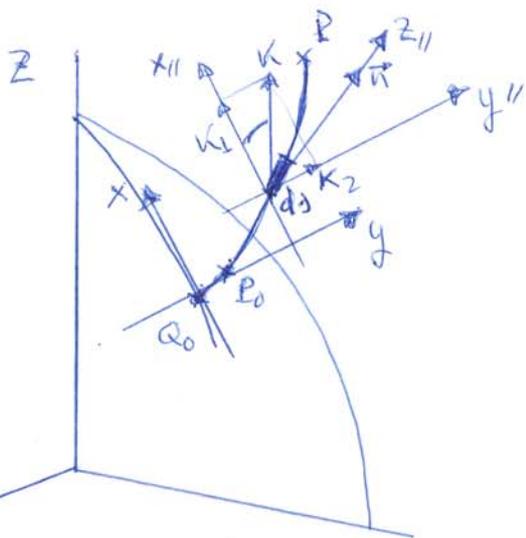
(ecuaciones XII.11.(a) y (b))

XII.5. Reducción de coordenadas astronómicas por curvatura de la línea de la plomada.

Debemos comenzar notando que las coordenadas astronómicas (Φ, Λ) , observadas en un punto P del terreno, son distintas a las coordenadas astronómicas referidas al punto P_0 sobre el geóide, debido a la curvatura de la línea de la plomada. Para evitar este problema tomamos la proyección de Helmert, no obstante nos encontramos con los siguientes problemas:

1. En las fórmulas XII.7 requieren el conocimiento de (ξ, η) , para el punto P del terreno considerado. Pero las fórmulas de Veising Meinesz nos dan (ξ, η) para el punto P_0 sobre el geóide. Por tanto, o bien reducimos hacia arriba las desviaciones gravimétricas, hasta el punto P , o bien las observaciones astronómicas sobre P se reducen hacia abajo hasta el geóide.
2. Si las observaciones astronómicas se emplean para calcular o determinar el geóide, lógicamente deben ser reducidas hacia abajo las coordenadas astronómicas del punto P , pues deseamos conocer las coordenadas astronómicas del punto P_0 .

Cuadro XII.4. Curvatura de la línea de la plomada.



Consideramos que $ds \approx dh$
 \vec{n} es un vector unitario a lo largo de la línea de la plomada $\approx \vec{n}$ el vector normal al elipsoide en Q_0 y P_0 .
 En el capítulo IX vimos que K_1 es la proyección

según el eje horizontal que se dirige al norte, siendo su valor:

$$K_1 = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x}$$

y también obtenimos el valor de K_2 , la proyección de la curvatura K sobre el eje horizontal con sentido hacia el este, tomaba el valor:

$$K_2 = \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial y}$$

Entonces, considerando las proyecciones mencionadas y la definición de curvatura, el ángulo entre dos tangentes consecutivas de estas proyecciones de la línea de la plomada nos dará:

$$d\phi = -K_1 dh \Rightarrow \delta\phi = \int_{P_0}^P d\phi = - \int_{P_0}^P \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial x} dh$$

$$d\lambda \cos\phi = -K_2 dh \Rightarrow \delta\lambda \cos\phi = - \int_{P_0}^P \frac{1}{g} \frac{\partial g}{\partial y} dh$$

Curvatura de la plomada normal.

Para emplear las expresiones obtenidas en el cuadro X.4, es necesario conocer $\frac{\partial g}{\partial x}$ y $\frac{\partial g}{\partial y}$, como funciones de la profundidad (más bien de la altura) h ; si empleamos la gravedad normal " γ " en lugar de " g ", podemos utilizar la expresión X.74, que puede escribirse también como:

$$\delta = \gamma_a (1 + f^* \sin^2 \phi - \frac{z}{a} h, \dots)$$

Así, aproximadamente:

$$\frac{\partial \delta}{\partial x} \approx \frac{1}{R} \frac{\partial \delta}{\partial \phi} \approx \frac{2 \gamma_a}{R} f^* \sin \phi \cos \phi \approx \frac{2 \gamma}{R} f^* \sin \phi \cos \phi$$

$$\frac{\partial \delta}{\partial y} \approx \frac{1}{R \cos \phi} \frac{\partial \delta}{\partial \lambda} = 0 \quad (\text{no hay dependencia con la longitud})$$

entonces:

$$\delta \phi = - \int_{E_0}^E \frac{1}{R} \frac{\partial \delta}{\partial x} dh = - \left(\frac{2 f^*}{R} \sin \phi \cos \phi \right) h_E$$

$$\Rightarrow \delta \phi_{\text{normal}} = - 0.17'' h_E (\text{en km}) \sin 2\phi$$

$$\delta \lambda = 0 \quad (\text{debido a la simetría del elipsoide de revolución})$$

Esta reducción presenta el inconveniente de que las masas topográficas (en altas montañas), producen un efecto sobre la curvatura de la línea de la plomada, que generalmente es mayor que la corrección "normal" presentada.

Fórmulas alternativas.

Es necesario obtener unas fórmulas más útiles, bajo el punto de vista práctico, que las anteriormente presentadas, para ello explotaremos la estrecha relación que existe, entre reducción por curvatura de la línea de la plomada y corrección ortométrica de nivelación (estudiada en el seminario III).

La figura inferior de la transparencia, sirve para ilustrar la corrección ortométrica, que debe ser añadida al incremento de nivelación "dn", con el objeto de convertirlo en la diferencia de altitudes ortométricas "dH":

$$d(OG) = dH - dn$$

en la figura esta representado un perfil NS, del cual notamos que la reducción por curvatura de la línea de la plomada "δφ", y la corrección ortométrica "dH":

$$\delta\phi = \frac{\partial(OG)}{\partial x}$$

análogamente, para el perfil EW tenemos:

$$\delta\lambda \cos\phi = \frac{\partial(OG)}{\partial y}$$

ahora bien:

$$dG = g dn \quad (G \text{ es el número geopotencial } w_0 - w)$$

$$-dw = g dn \quad (\text{gradiente vertical de la gravedad})$$

en consecuencia :

$$d(OG) = dH - du = dH - \frac{dG}{g} = dH + \frac{1}{g} dW$$

⇒ (ecuaciones XII.12 (a) y (b))

Llegamos, así, al objetivo buscado, relacionar la reducción debida a la curvatura de la plomada, con la actitud ortométrica y el potencial W . Estas ecuaciones con ligeros cambios, pueden usarse para obtener las correcciones $\delta\phi$ y $\delta\lambda$.

Considerando :

$$d(OG) = dH - \frac{dG}{g} = d\left(\frac{G}{\bar{g}}\right) - \frac{dG}{g} = \frac{dG}{\bar{g}} - \frac{G}{\bar{g}^2} d\bar{g} - \frac{dG}{g}$$

(\bar{g} es la gravedad media a lo largo de la línea de la plomada, y puede evaluarse como se dijo en el seminario III. $H = G/\bar{g}$, $G = \int_0^H \bar{g} dH$)

$$\Rightarrow d(OG) = -\frac{G}{\bar{g}^2} + \frac{g - \bar{g}}{\bar{g}} \left(\frac{dG}{g}\right) = -\frac{H}{\bar{g}} d\bar{g} + \frac{g - \bar{g}}{\bar{g}} du \Rightarrow$$

⇒ (ecuaciones XII.13 (a) y (b))

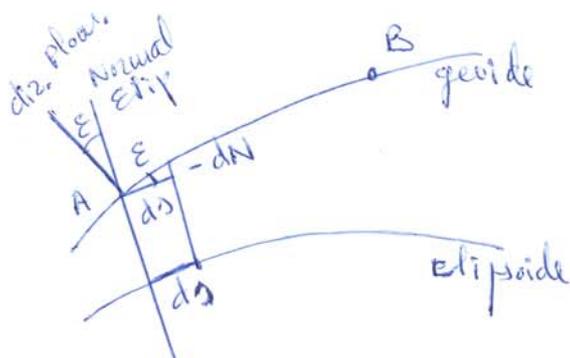
donde $\tan \beta_1 = \frac{\partial u}{\partial x}$, $\tan \beta_2 = \frac{\partial u}{\partial y}$; son los ángulos de inclinación de los perfiles NS y EW, con respecto al horizonte local. En la práctica, se determina $\frac{\partial u}{\partial x}$ y $\frac{\partial u}{\partial y}$, a partir de un mapa topográfico en el cual se representa $u = u(x, y)$.

Las fórmulas XII.13(a) y (b) son muy interesantes bajo el punto de vista práctico, ya que, en estas fórmulas sólo se necesitan el valor medio \bar{g} de la gravedad entre el geode y el terreno, junto con el valor de campo g (gravedad en el punto P del terreno). Las derivadas horizontales de \bar{g} se obtienen numéricamente, a partir del valor de $\bar{g} = \bar{g}(x, y)$ obtenido mediante una reducción de Poy de la gravedad medida g (seminario III). Debemos tener una red gravimétrica suficientemente densa alrededor de cada estación.

Finalmente, notemos que el signo de las correcciones XII.13, es positivo cuando $\frac{\partial \bar{g}}{\partial x}$ o $\frac{\partial \bar{g}}{\partial y}$ son negativos (lo mismo sucede con las fórmulas presentadas como resultado del cuadro XII.4), es decir, cuando g decrece a partir del punto P (en la dirección del eje x tenemos $\delta\phi$, y en la dirección del eje y $\delta\lambda$). Entonces, sobre la figura inferior de la transparencia vemos que:

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{geode}} &= \Phi_{\text{terreno}} + \delta\phi \\ \Lambda_{\text{geode}} &= \Lambda_{\text{terreno}} + \delta\lambda \end{aligned}$$

XII.6. Determinación astrogeodésica del geode.



La forma del geode puede determinarse si se conocen las desviaciones de la vertical, para ello la ecuación básica es:

$$dN = -\varepsilon ds \quad (\text{capítulo X})$$

$$\Rightarrow N_B = N_A - \int_A^B \varepsilon ds \quad (\text{donde } N_A \text{ debe ser conocido})$$

ε es la componente de la desviación de la vertical, a lo largo del perfil AB, cuyo acimut es α ($\varepsilon = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha$).

La fórmula XII.14(a) expresa la ondulación del geoides "N" como una integral de las desviaciones de la vertical "E", a lo largo de un perfil AB; pudiendo hacer las siguientes observaciones:

1. En dicha fórmula, las componentes de la vertical (ξ, η) se refieren al geoides, esto significa que las observaciones astronómicas (ξ, η) deben ser reducidas al geoides de acuerdo a lo dicho en el apartado XII.5. Esta reducción es necesaria cuando las componentes (ξ, η) de la desviación de la vertical, no son obtenidas mediante el método gravimétrico (fórmulas de Vaning Meinesz, cap. X).
2. Puesto que "N" es una función de la posición, la integral de la fórmula XII.14(a), es independiente de la forma de la línea que conecta los puntos A y B, esto supone que el perfil AB, no necesita ser necesariamente una línea geodésica sobre el elipsoide de referencia, así, en la práctica, se utilizan con frecuencia perfiles NS o EW, de tal forma que $\varepsilon = \xi$ o $\varepsilon = \eta$, respectivamente. La evaluación numérica de la integral XII.14(a) puede realizarse, cuando se dispone de suficientes valores de "E" a lo largo del perfil, siendo más conveniente disponer de un mapa de (ξ, η), con valores que han sido determinados previamente (por ejemplo, mediante el método gravimétrico). Los perfiles se eligen de forma que se produzcan redundancias que puedan ser ajustadas.

3. Cuando utilizamos las observaciones astronómicas reducidas al geode, para hallar las componentes de la desviación de la vertical, mediante las ecuaciones:

$$\xi = \Phi - \phi$$
$$\eta = (\Lambda - \lambda) \cos \phi$$

comparando las coordenadas astronómicas y geodésicas del mismo punto del geode, decimos que estamos llevando a cabo la determinación astrogeodésica del geode. La forma de obtener las coordenadas astronómicas del punto P del geode ya ha sido descrita, por ello, a continuación describiremos cómo se determinan las coordenadas geodésicas de tal punto.

Determinación astrogeodésica del geode: nivelación astronómica.

La determinación astrogeodésica del geode se llama también nivelación astronómica (Helmert, 1808), y se basa en el proced. antes comentado, donde las coordenadas geodésicas se obtienen de la siguiente forma:

1. En una amplia triangulación se escoge un punto inicial P_1 , para el cual se prescriben la ondulación del geode " N_1 " y las componentes de la vertical (ξ_1, η_1) (desviación de la vertical). Aquí pueden considerarse arbitrariamente (N_1, ξ_1, η_1) , con lo que el elipsoide quedará situado de forma arbitraria, con resp. a la Tierra, es decir, la posición del elipsoide de referencia con respecto a la Tierra quedará fijada. Generalmente, se prescriben los valores $\xi_1 = \eta_1 = N_1 = 0$; en este caso, la figura superior de la transparencia ilustra, la posición del elipsoide de referencia, con respecto a la Tierra (al geode), notar que hemos despreciado la curvatura de la línea de la

plomada en dicha representación. El elipsoide es tangente al geode por debajo de ξ_1 . Finalmente, la condición de que el elipsoide de referencia tenga su eje de simetría paralelo al eje de la Tierra, determina la orientación de la red de triangulación ya que, esta condición se verifica, tal como se ve en la figura, cuando (ξ_1, γ_1) son cero, así:

$$(\text{ecuación VIII.7}) \Rightarrow \alpha_1 = A_1 - \gamma_1 \operatorname{tg} \alpha_1 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = A_1$$

● el acimut geodésico en el punto inicial es igual al acimut astronómico quedando la red orientada con esta determinación (A_1).

2. Podemos calcular desde el punto 1 ángulos y distancias de todos los vértices de la red, determinando así su posición (ξ_i, λ_i) (capítulo VIII, considerando las reducciones de ángulos y distancias presentadas en el apartado VIII.4).

3. Notar que (N, ξ, γ) se necesitan para aplicar las reducciones anteriores, si se quiere realizar medidas en los otros vértices de la red. No obstante, para evaluar las reducciones sólo se necesitan valores aproximados de (N, ξ, γ) . Para obtener estos valores aproximados podemos:

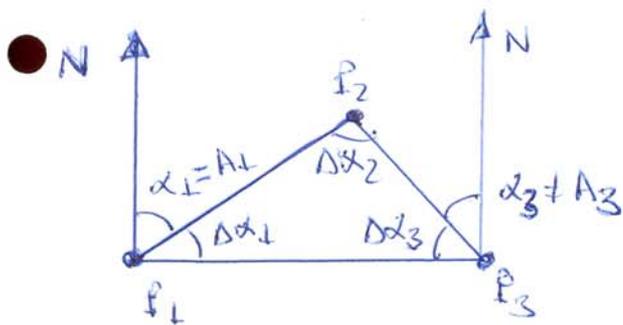
- Seguir el proceso explicado con ángulos y distancias no reducidos, hallando así, una colección de valores (ξ_i, γ_i, N_i) aproximados, para calcular en una segunda etapa los valores correctos.

- Utilizar el método gravimétrico.

- Determinar la componente "y" mediante VIII.7(d) :

$$y = (A - \alpha) \cot \phi$$

porque (según la figura) conocidos los ángulos en los vértices de la triangulación (los cuales si son ángulos horizontales no requieren reducción) y los acimutes astronómicos, podemos hallar las componentes y_i en cada uno de los vértices de la red, confeccionar un mapa $y = y(\phi, \lambda)$ y calcular "N" para perfiles AB en dirección este-oeste.



Las estaciones astronómicas en las que se realizan medidas de longitud y acimut, se llaman estaciones Laplace, porque en ellas podemos comprobar que:

$$A - \alpha = (\Lambda - \lambda) \operatorname{sen} \phi$$

(condición de Laplace, ec. XII.7(d))

Finalmente, las desviaciones de la vertical (ξ, η) pueden ser calculadas por:

$$\xi = \Phi - \phi$$

$$\eta = (\Lambda - \lambda) \operatorname{cosec} \phi$$

entonces, mediante la ecuación XII.14(a) podemos hallar "N" en todos los vértices de la triangulación. Debemos notar que tales altitudes se hallaron, partiendo de unos valores prescritos (ξ_1, η_1, N_1) y de un semieje "a" y un aplazamiento "f", es decir, empleando un datum astrogeodésico ($a, f; \xi_1, \eta_1, N_1$); entonces

sucede que las desviaciones (ξ, η) no son desviaciones absolutas, y por ello, el origen del elipsoide de referencia no estará en el centro de masas de la Tierra. Este problema se estudiará con detalle en el apartado XII.8.

Comparación con el método de Stokes.

Cuando comparamos la fórmula de Helmer (ecuación XII.14(a)) con la fórmula de Stokes (ecuación 8.34), estamos comparando las ecuaciones básicas del método astrogeodésico y del método gravimétrico. Notamos que ambos métodos persiguen el mismo objetivo: hallar la ondulación del geode "N"; la diferencia reside en que el método astrogeodésico emplea la dirección de la gravedad (vector gravedad \vec{g}), para determinar "N"; mientras que el método gravimétrico emplea la magnitud de \vec{g} .

Además existe otra notable diferencia, característica de la diferencia entre ambos métodos. En la fórmula de Helmer, la integral se efectúa a lo largo de un perfil, por ello, es suficiente conocer la desviación de la vertical en un área limitada; la posición del elipsoide de referencia con respecto al centro de la Tierra, es desconocida; ésta sólo puede determinarse usando el método gravimétrico (o también el análisis de las órbitas de SAT). El método astrogeodésico sólo puede usarse sobre los continentes, porque las medidas necesarias son imposibles sobre el mar. En cambio, la integral de Stokes debe extenderse sobre toda la Tierra, por ello, se debe medir la anomalía de la gravedad en el mar, esto es posible con precisión. Así, el método gravimétrico da para toda la

Tierra, medidas precisas y absolutas de "N", con el centro del elipsoide de referencia coincidiendo con el centro de la Tierra.

En consecuencia, de los métodos geodésicos clásicos, sólo el método gravimétrico, permite establecer un sistema geodésico mundial. No obstante, ambos métodos deben combinarse, junto con toda la información que sea posible obtener, por otros caminos (por ejemplo, la obtenida mediante el seguimiento de SAT).

● Corrección por curvatura de la plomada.

Anteriormente, en las ecuaciones:

$$\xi = \Phi - \phi \quad ,, \quad \eta = (N - \lambda) \cos \phi$$

introducíamos las coordenadas astronómicas (Φ, λ) reducidas al geoido, tal como se indicó en el apartado XII.5; de esa forma conocidas (ξ, η) sobre el geoido, se empleaba la ecuación XII.14(a) para obtener la ondulación del geoido "N". Aquí, presentaremos

● un proceso alternativo, consistente en utilizar las coordenadas (Φ, λ) observadas directamente en \mathbb{P} , para obtener (ξ, η) y luego, mediante la ecuación XII.14(a), la ondulación del geoido "N".

Los valores de la ondulación del geoido N serán designados por N' , reservando la notación N para las altitudes del geoido sobre el elipsoide de referencia, halladas correctamente.

Según la figura inferior de la transparencia, podemos concluir:

$$dh = dN + dH = dn + dN' \Rightarrow dN' - dN = \underbrace{dH - dn}_{d(\sigma)} \Rightarrow$$

(reducción ortométrica)

$$\Rightarrow (N'_B - N'_A) - (N_B - N_A) = OC_{IAB} \Rightarrow N_B - N_A = N'_B - N'_A - OC_{IAB}$$

\Rightarrow (ecuación XII.15)

donde hemos cambiado $N'_B - N'_A$ por su valor según la ecuación XII.14(a) (con la desviación de la vertical referida al punto P, sobre el terreno); y el valor de la reducción ortométrica OC_{IAB} dado por la ecuación VIII

- Notar que según el procedimiento descrito, la corrección debida a la curvatura de la línea de la plomada, se le aplica al propio valor N , no a las coordenadas astronómicas (Φ, Λ) .

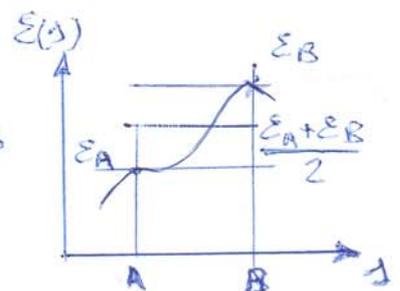
XII.7. Interpolación de las desviaciones de la vertical. Nivelación astrogravimétrica.

Tanto si utilizamos la expresión XII.14(a) o la expresión XII.15, resulta necesario estimar el término:

$$\int_A^B \varepsilon ds \quad , \quad \varepsilon = \xi \cos \alpha + \eta \sin \alpha$$

cuando las estaciones están muy próximas entre sí, por interpol. puede hallarse $\varepsilon(s)$ y realizar una integración numérica de tal expresión. La aproximación:

$$\int_A^B \varepsilon ds \approx \frac{\varepsilon_A + \varepsilon_B}{2} \lambda_{AB}$$



es una aproximación muy fuerte (gruesa) aunque las distancias entre estaciones sean pequeñas, ya que, se considera que el geóide entre A y B forma un arco circular. No obstante, en áreas moderadamente llanas, para distancias menores de 25 Km, la aproximación anterior puede resultar satisfactoria. En general, debido a que las distancias pueden ser mayores y la topografía no será siempre llana, es necesario idear medios eficientes de interpolación, a continuación presentaremos algunos.

Distancias zenitales.

Las medidas de distancias zenitales pueden, al menos teóricamente usarse para sustituir a las desviaciones de la vertical, el principio fue descrito en el capítulo III, la ecuación básica es:

$$E_2 - E_1 = z'_1 + z'_2 - \gamma - 180^\circ \quad \text{,,} \quad \gamma = \frac{s}{R}$$

donde "s" es la distancia elipsoidal entre las estaciones y R es un radio medio de curvatura, definido de la misma forma que

en el apartado III.4. Conocido E_1 o E_2 podemos hallar de esta forma tantos valores intermedios, como medidas de distancias zenitales hagamos. La dificultad que presenta este método es la corrección de refracción atmosférica, que es necesario aplicar.

Medidas con la balanza de torsión.

La balanza de torsión es un instrumento (pág. 341, Mirónov; Curso de prospección gravimétrica) que permite medir ciertas combinaciones de las derivadas parciales del potencial gravítico W , con respecto a un sistema de coordenadas, que tiene como eje z , el eje vertical.

Cuando orientamos los ejes (x, y) hacia el norte y hacia el este, podemos medir la cantidad:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

en el geóide, entonces, sabiendo que $\frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = 0$, siendo el plano xy tangente al elipsoide, tenemos:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y}$$

y haciendo uso de las relaciones básicas:

$$\xi = -\frac{1}{G} \frac{\partial T}{\partial x} \quad \eta = -\frac{1}{G} \frac{\partial T}{\partial y} \quad (\text{ecuaciones III.16})$$

donde G es el valor medio de la gravedad definido en el capítulo I como 979.8 gal. Derivando:

$$\frac{\partial \xi}{\partial y} = \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{1}{G} \frac{\partial^2 W}{\partial x \partial y}$$

Así, con la balanza de torsión es posible medir las derivadas horizontales, de las componentes de la desviación de la vertical. Numéricamente podemos obtener los valores de (ξ, η) mediante una adecuada integración (realmente obtendremos $\xi_2 - \xi_1$ y $\eta_2 - \eta_1$). Este método se usa en pocas ocasiones, debido a que es muy sensible a las irregularidades topográficas, sin embargo puede ser útil a lo largo de líneas costeras, donde un levantamiento gravimétrico detallado no es posible.

Cuadro XII.5. Demostración de las ecuaciones básicas XII.16.

Para obtener las ecuaciones XII.16, partimos de las ecuaciones X.89, de las que podemos escribir:

$$\xi = -\frac{1}{R} \frac{\partial N}{\partial \phi} = -\frac{\partial N}{\partial x} = -\frac{1}{G} \frac{\partial T}{\partial x}$$

$$\eta = \frac{-1}{R \cos \phi} \frac{\partial N}{\partial \lambda} = -\frac{\partial N}{\partial y} = -\frac{1}{G} \frac{\partial T}{\partial y}$$

(ec. X.92) N = N₀ + $\frac{T - T_0}{G}$ (ec. X.56)

donde R es el radio medio de la Tierra definido como:

$$\frac{4}{3} \pi R^3 = \frac{4}{3} \pi a^2 b \Rightarrow R = (a^2 b)^{1/3}$$

R = 6371 km

Nivelación astrogravimétrica.

Cuando consideramos las fórmulas de Venning Meunier (apartados X.9 y X.11) no extiende la integración a toda la Tierra, sino sobre el entorno cercano al punto considerado (al menos dos veces la distancia entre dos estaciones consecutivas), introducimos un pequeño error al despreciar las zonas distantes; no obstante, para obtener valores aproximados de (ξ, η) es suficiente.

Entonces, a partir de los valores (ξ, η) aproximados, designémoslos por (ξ', η') , hallamos $\varepsilon' = \xi' \cos \alpha + \eta' \sin \alpha$, evaluando las pequeñas diferencias $\delta \varepsilon = \varepsilon - \varepsilon'$, mediante una interpolación lineal:

$$\delta \varepsilon_P = \delta \varepsilon_A + \frac{\delta \varepsilon_B - \delta \varepsilon_A}{\Delta_{AB}} \Delta_{AP}$$

siendo P un punto cualquiera entre A y B (del perfil que une las estaciones astronómicas A y B). La interpolación lineal presentada es correcta, ya que, los valores exactos " ε " y los aproximados ε' varían lentamente, pudiendo suponer que su variación es lineal con la distancia. De esta forma conocidos en A y B , los valores ε_A y ε_B , en estos puntos y en los intermedios P_i ($i=1, \dots, N$), se calculan las desviaciones de la vertical según el método gravimétrico, teniendo $\varepsilon'_A, \varepsilon'_B, \varepsilon'_1, \dots, \varepsilon'_N$; y se interpolan los valores $\delta\varepsilon_i$ en los puntos medios (usando la ec. anterior). Teniendo las desviaciones de la vertical en los puntos intermedios, referidas al datum astrogeodésico:

$$\varepsilon_i = \varepsilon'_i + \delta\varepsilon_i$$

Al proceso descrito, en el cual se combinan determinaciones gravimétricas con desviaciones astrogeodésicas, se le denomina nivelación astrogravimétrica. Este método está considerado como el mejor método de interpolación, no obstante, se requiere una red gravimétrica, suficientemente densa, extendida por lo menos, dos veces la distancia entre dos estaciones.

Utilización de las desviaciones topoisostáticas.

En el capítulo XI, presentamos las expresiones XI.13, las cuales nos daban el efecto indirecto sobre las desviaciones de la vertical, en concordancia con las ecuaciones XI.75, donde $\delta\omega$ es el efecto indirecto sobre " N ". Este efecto es en esencia idéntico a la llamada desviación topo-isostática de la vertical (Heiskanen and Merini, 1958). Así, en la expresión $\varepsilon_i = \varepsilon'_i + \delta\varepsilon_i$, podemos hallar ε' también a partir del efecto de la topografía. Este método tiene la ventaja de

no requiere información gravimétrica, pero está afectado por anomalías desconocidas de la densidad, y es además muy laborioso, por ello, generalmente, se usa la nivelación astrogravimétrica, su aplicación en la práctica se llevaba a cabo en las décadas pasadas, entre estaciones astrogeodésicas situadas en zonas muy montañosas.

XII.8. Transformaciones de coordenadas y cambio de dátum.

Como indicamos en el apartado XII.6, un dátum geodésico queda determinado por las dimensiones del elipsoide de referencia (semieje mayor a y apluramiento f) y su posición con respecto a la Tierra o al geode, esta posición relativa viene dada, ordinariamente, por la ondulación del geode N_1 y los componentes de la desviación de la vertical (ξ_1, η_1) en un punto inicial P_1 . Lógicamente, en lugar de las cantidades (N_1, ξ_1, η_1) podemos usar las coordenadas geodésicas de P_1 :

$$\begin{cases} \xi_1 = \Phi_1 - \phi_1 \\ \eta_1 = (\Lambda_1 - \lambda_1) \cos \phi_1 \\ N_1 = h_1 - H_1 \quad (\text{ec. XII.7 para } P_1) \end{cases}$$

Un método equivalente, consiste en usar las coordenadas rectangulares (x_0, y_0, z_0) del centro del elipsoide de referencia, con respecto al centro de la Tierra. Si variamos el dátum geodésico, es decir, el elipsoide de referencia y su posición, las coordenadas geodésicas (ϕ, λ, h) y las desviaciones de la vertical y las ondulaciones del geode, también cambiarán. Entonces, puesto que hay tres formas diferentes de fijar el dátum, podemos formular tales cambios en términos

de variaciones de:

$$(\varphi_1, \lambda_1, h_1) \quad (x_0, y_0, z_0)$$

Matemáticamente, el problema es esencialmente una transformación de coordenadas, porque todo datum geodésico corresponde a un sistema diferente de coordenadas geodésicas (φ, λ, h) .

En este apartado estudiaremos tales transformaciones de coordenadas, considerando que, en general, el centro del elipsoide de referencia no coincide con el CN de la Tierra, pero en cambio, el eje del elipsoide de referencia (su eje de simetría, eje z) es paralelo al eje de rotación de la Tierra. Así, cuando tomamos un sistema de ejes cartesianos XYZ , cuyo origen está en el centro de la Tierra, estando tales ejes dirigidos como se indicó en el apartado XII.2, las ecuaciones XII.4(b) se escriben en la forma:

(ecuaciones XII.17)

Estas ecuaciones constituyen el punto de partida, de varias e. imp. fórmulas diferenciales de transformación de coordenadas, que veremos a continuación.

Relación $(\delta x, \delta y, \delta z)$ con $(\delta \varphi, \delta \lambda, \delta h)$ y $(\delta a, \delta f, \delta x_0, \delta y_0, \delta z_0)$.

Primera mente, buscamos cómo cambian las coordenadas (x, y, z) con las coordenadas geodésicas, cuando este cambio es pequeño, también consideraremos una alteración del datum geodésico en una pequeña cantidad. $(\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0)$ representarán una pequeña traslación del centro del elipsoide, respecto al centro de la Tierra, manteniendo

$$\Rightarrow P_N = a \underbrace{(1 + f + \dots)}_{(1-f)^{-1} \text{ (pág. 110; Schaum)}} (1 - f \cos^2 \phi \dots) = a (1 + f - f \cos^2 \phi \dots)$$

$$\Rightarrow \boxed{P_N \approx a(1 + f \sin^2 \phi)}$$

También es posible simplificar $\frac{b^2}{a^2} P_N$ usando los exp. anteriores:

$$\boxed{\frac{b^2}{a^2} P_N = (1 - 2f \dots)(1 + f \sin^2 \phi) a \approx \boxed{a(1 - 2f + f \sin^2 \phi)}}$$

Sobre las ecuaciones XII.19 pueden llevarse a cabo fácilmente las derivadas parciales, indicadas en las ecuaciones XI.18; por ejemplo:

$$\frac{\partial X}{\partial a} = (1 + f \sin^2 \phi) \cos \phi \cos \lambda \approx \cos \phi \cos \lambda$$

notar que despreciamos el aplanaamiento "f", al tomar los valores de las derivadas parciales. Esto equivale a tomar, para el cálculo de los coeficientes de la matriz XII.18, y sólo para estos coeficientes, una aproximación esférica.

De esta forma obtenemos todos los coeficientes escribiendo:

(ecuaciones XII.20)

Notar que las ecuaciones XII.20 son precisamente la relación que buscábamos, entre $(\delta X, \delta Y, \delta Z)$ y $(\delta \phi, \delta \lambda, \delta h, \delta x_0, \delta y_0, \delta z_0, \delta a, \delta f)$.

Transformación de coordenadas geodésicas.

De las ecuaciones XII.20, pueden deducirse importantes fórmulas para la transformación de coordenadas. En primer lugar si P está

fijo, es decir, si $\delta X = \delta Y = \delta Z = 0$, podemos determinar los cambios en las coordenadas geodésicas del punto P (o de cualquier punto), cuando varían las dimensiones y posición del elipsoide de referencia. Para ello, trataremos de despejar $(\delta\phi, \delta\lambda, \delta h)$ multiplicando la primera ecuación XII.20 por $-\text{sen}\phi \cos\lambda$, la segunda por $-\text{sen}\phi \text{sen}\lambda$ y la tercera por $\cos\phi$; operando nos queda:

(ecuación XII.21 (a))

para obtener las ecuaciones (b) y (c), los factores son $-\text{sen}\lambda$,

Cuadro XII.7. Demostración de las ecuaciones XII.21.

Multiplicaremos en, primer lugar, según el orden indicado:

$$0 = -\delta x_0 \text{sen}\phi \cos\lambda + a \text{sen}^2\phi \cos^2\lambda \delta\phi + a \cos\phi \text{sen}\phi \cos\lambda \text{sen}\lambda \delta\lambda - \cos\phi \text{sen}\phi \cos^2\lambda (---)$$

$$0 = -\delta y_0 \text{sen}\phi \text{sen}\lambda + a \text{sen}^2\phi \text{sen}^2\lambda \delta\phi - a \cos\phi \text{sen}\phi \cos\lambda \text{sen}\lambda \delta\lambda - \cos\phi \text{sen}\phi \text{sen}^2\lambda (---)$$

$$0 = \delta z_0 \cos\phi + a \cos^2\phi \delta\phi + \text{sen}\phi \cos\phi (---) - 2a \text{sen}\phi \cos\phi \delta f$$

ahora sumamos todas las ecuaciones, agrupando los términos y operando, tenemos:

$$a \delta\phi = \text{sen}\phi \cos\lambda \delta x_0 + \text{sen}\phi \text{sen}\lambda \delta y_0 - \cos\phi \delta z_0 + 2a \text{sen}\phi \cos\phi \delta f$$

análogamente demostramos las ecuaciones XII.21 (b) y (c).

$\cos\lambda$, 0 y para δh ($\cos\phi \cos\lambda$, $\cos\phi \text{sen}\lambda$, $\text{sen}\phi$). De esta forma relacionamos la traslación del elipsoide, con las coordenadas geodésicas, o más bien, con los cambios en las coordenadas geodésicas del datum $(\delta\phi_1, \delta\lambda_1, \delta h_1)$. Si queremos conocer como varían las coordenadas geodésicas de los demás puntos, es decir, $(\delta\phi, \delta\lambda, \delta h)$

debemos, en primer lugar, expresar el desplazamiento $\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$, del elipsoide de referencia, en términos de $(\delta\phi_1, \delta\lambda_1, \delta h_1)$. Para ello, nos servimos de nuevo de las ecuaciones XII.20 considerando que $\delta x = \delta y = \delta z = 0$ (porque la posición de los puntos en el espacio es la misma, es invariable), pero ponemos $\phi = \phi_1, \lambda = \lambda_1, h = h_1$; obteniendo:

(ecuaciones XII.22)

expresiones de $(\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0)$ que necesitamos llevar a las ecuaciones XII.21, de manera que tenemos:

(ecuaciones XII.23)

donde $\Delta\lambda = \lambda - \lambda_1$. Estas fórmulas expresan las variaciones $(\delta\phi, \delta\lambda, \delta h)$, en las coordenadas geodésicas de un punto arbit. en función de las variaciones $(\delta\phi_1, \delta\lambda_1, \delta h_1)$ de un punto dado, y de los cambios $(\delta a, \delta f)$ en los parámetros del elipsoide de referencia. Aunque matemáticamente las ecuaciones XII.23 son transformaciones infinitesimales de coordenadas, para el geodesta permiten calcular el efecto de un cambio de datum geodésico. Notar que las ecuaciones XII.21 y XII.23 son transformaciones infinitesimales de coordenadas geodésicas, que sólo difieren en los parámetros usados para definir el datum geodésico, en las ecuaciones XII.21 está definido por $(a, f; x_0, y_0, z_0)$ y en las ecuaciones XII.23 por $(a, f; \phi_1, \lambda_1, h_1)$.

Transformación de (ξ, η, N) .

En la práctica, las ecuaciones XII.23 se expresan en términos de la variación de las componentes de la derivación de la vertical y de la ondulación del geóide. Entonces, puesto que las coordenadas naturales (Φ, Λ, H) no son afectadas por un cambio de datum, quedan invariables, y así podemos escribir a partir de las ecuaciones XII.7:

$$\delta\phi = -\delta\xi$$

$$\delta\lambda \cos\phi = -\delta\eta$$

$$\delta h = \delta N$$

que aplicado a las ecuaciones XII.23, nos permite escribir:

(ecuaciones XII.24)

Estas ecuaciones para el calcular el efecto que produce un cambio de datum geodésico, están entre las ecuaciones más importantes de la geodesia; son conocidas ordinariamente con el nombre de fórmulas de Veising Meinesz.

Podemos notar que las dos primeras ecuaciones de XII.24, pueden deducirse por diferenciación de la 3^a, si consideramos las ecuaciones X.75 en aproximación esférica:

$$\delta\xi = -\frac{1}{R} \frac{\partial(\delta N)}{\partial\phi} \approx -\frac{\partial}{\partial\phi} \left(\frac{\delta N}{a} \right)$$

$$\delta\eta = -\frac{1}{R \cos\phi} \frac{\partial(\delta N)}{\partial\lambda} \approx -\frac{1}{\cos\phi} \frac{\partial}{\partial\lambda} \left(\frac{\delta N}{a} \right)$$

Ejemplo XII.1. Hallar la orientación de un sistema geodésico local, es decir, su conversión en un sistema geodésico mundial. Suponemos conocidos (ξ_1, η_1, N_1) referidos a un elipsoide en pos. abs. (ap. XII.9)

Solución.

Una importante aplicación de las fórmulas presentadas en el apartado XII.8, consiste en pasar de un sistema geodésico local a un sistema geodésico mundial. Supongamos que una red de triangulación y trilateración, ha sido calculada sobre un datum geodésico local $(a', f'; \xi_1', \eta_1', N_1')$. Entonces (ξ_1', η_1', N_1') pertenecen al punto fundamental P_1 , pudiendo ser cero o cualquier otro valor. Supongamos que de este punto inicial se conocen la altitud absoluto del geóide N_1 y las componentes (ξ_1, η_1) de la desviación de la vertical (comp. abs.). Las cantidades $(a, f; N_1, \xi_1, \eta_1)$ determinan completamente el sistema geodésico mundial considerado.

Para transformar el sistema local $(a', f'; \xi_1', \eta_1', N_1')$ en el sistema mundial, ponemos:

$$\begin{aligned} \delta \xi_1 &= \xi_1 - \xi_1' & \delta a &= a - a' \\ \delta \eta_1 &= \eta_1 - \eta_1' & \delta f &= f - f' \\ \delta N_1 &= N_1 - N_1' \end{aligned}$$

aplicando las ecuaciones XII.24 con los valores presentados, obtendremos para todos los puntos de la triangulación y trilat., puntos del sistema local, los cambios $\delta \xi, \delta \eta, \delta N$; teniendo los valores (ξ, η, N) en el sistema mundial, mediante:

$$\xi = \xi' + \delta\xi \quad ,, \quad y = y' + \delta y \quad ,, \quad N = N' + \delta N$$

Las coordenadas geodésicas de tales puntos en el sistema geodésico mundial, se obtienen por:

$$\begin{aligned} \phi &= \phi' - \delta\xi \\ \lambda &= \lambda' - \delta y \sec \phi \\ h &= h' + \delta N \end{aligned}$$

Ejemplo XII.2. Determinar las coordenadas (x'_0, y'_0, z'_0) del centro del elipsoide de referencia, que define el datum local $(a', f'; \xi'_1, y'_1, N'_1)$.

Solución.

Puesto que el datum mundial $(a, f; \xi_1, y_1, N_1)$ corresponde a un elipsoide en posición absoluta:

$$x_0 = y_0 = z_0 = 0$$

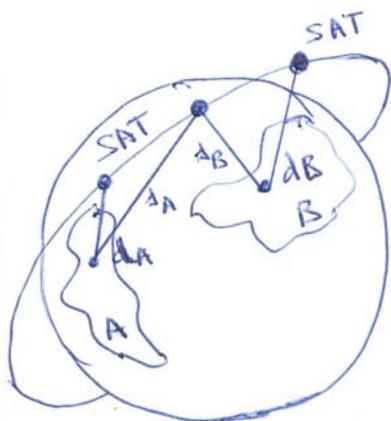
de modo que:

$$\delta x_0 = x_0 - x'_0 = -x'_0 \quad ,, \quad \delta y_0 = y_0 - y'_0 = -y'_0$$

$$\delta z_0 = z_0 - z'_0 = -z'_0$$

notar que entonces conoceremos las coordenadas (x'_0, y'_0, z'_0) , cuando empleemos las ecuaciones XII.22, las cuales nos permiten calcular $(\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0)$.

Apendice XIII.1. Enlace de sistemas geodésicos diferentes usando SAT.



Utilizando SAT se puede realizar el enlace geodésico, entre puntos que se hallan ubicados a grandes distancias sobre la Tierra, por ejemplo, entre los puntos geodésicos de diferentes continentes. Tal enlace permite relacionar sistemas

de coordenadas locales en distintos continentes o archipiélagos de islas, permitiendo establecer un sistema geodésico mundial geocéntrico ($x_0 = y_0 = z_0 = 0$ el centro del elipsoide de ref. coincide con el centro de la Tierra). De esta forma medidas realizadas con respecto al datum local, pueden llevarse al sistema geodésico mundial. En la red geodésica española, el datum lo constituye el Observatorio Astronómico de Madrid, no obstante, el archipiélago canario posee su datum propio en el vértice Pico de las Nieves, en Gran Canaria; para Europa occidental se adoptó en 1950 como nuevo datum el vértice Postdam (Alemania) y el elipsoide internacional de referencia de Hayford. En la figura los puntos d_A y d_B son los puntos iniciales, que nos dan la posición relativa del elipsoide de referencia con respecto al centro de la Tierra, sus coordenadas (ϕ_A, λ_A, h_A) junto con (a, f) , permiten establecer, como sabemos, un datum geodésico, que se puede escribir de forma más conveniente para este caso por $(x_0, y_0, z_0; a, f)$. Si observamos la posición de un SAT, dada por las ec. XIII.30 o XIII.31; a partir de las ec. XII.17 conseguimos nuestro objetivo

XII.9. Determinación de las dimensiones de la Tierra.

Si usamos el método gravimétrico con un elipsoide de referencia fijo, cuyo centro coincide con el centro de la Tierra, las ondulaciones del geóide se obtienen por la ecuación 8.56 (b). Así, la determinación del tamaño de la Tierra, se reduce al problema de determinar la constante N_0 . En el capítulo 8 dedicamos un subapartado a la determinación de la constante " N_0 ", también se explica en este capítulo que la interpretación de N_0 , bajo el punto de vista

geométrico, es:

- Si " a " es el radio ecuatorial del elipsoide de referencia dado, $a_E = a + N_0$ es el radio ecuatorial de un elipsoide cuyo potencial normal " U_0 " es igual al potencial real del geóide W_0 , encerrando la misma masa que la Tierra y siendo su achatamiento " f " el mismo.

Además, debemos recordar que en el capítulo 8 se explicó, que si el elipsoide de referencia se escoge de tal forma que tenga el mismo valor del coeficiente $\mathcal{F}_2 = (G - \bar{A}) / Ma^2$, que la Tierra (siendo \mathcal{F}_2 conocido con precisión por la dinámica de satélites artificiales), entonces a_E será el semieje mayor del elipsoide medio terrestre.

Podemos entonces concluir, que mediante el uso del método gravimétrico, sólo es posible calcular el segundo término del segundo miembro de la ecuación básica 8.56 (b). Para determinar " N_0 " podemos seguir el método descrito en el capítulo 8, no obstante, en la práctica la determinación astrogeodésica de " N_0 ", resulta más eficiente, ya que, el principio de cálculo es similar.

El problema de calcular " N_0 " por el método astrogeodésico, puede formularse concretamente de la siguiente forma:

1. Suponemos conocido sobre toda la tierra el geode gravimétrico, el elipsoide de referencia utilizado está en posición absoluta, pero puesto que N_0 no es conocido (o al menos no es conocido con exactitud), la escala de geode está indeterminada.
2. Por otra parte, el geode astrogeodésico puede ser determinado como antes se ha explicado, y su posición relativa viene dada por el dátum geodésico empleado, dátum geodésico local.
3. En consecuencia, lo que tenemos que hacer es ajustar ambos geoides juntos, de esta forma determinamos la escala del geode gravimétrico " N_0 ", y transformamos el dátum astrogeod. local en el sistema geodésico mundial.

Para llevar a cabo este último paso (3), consideraremos que los otros dos pasos anteriores han sido ya efectuados. Suponemos que en los dos pasos anteriores, se ha utilizado para calcular el mismo elipsoide de referencia (a, f). Si no es así, podemos transf. el sistema astrogeodésico, a los parámetros del elipsoide de ref. usado en el método gravimétrico, para ello, empleamos las fórmulas VII.24, poniendo $\delta\xi_1 = \delta\eta_1 = \delta N_1 = 0$. Cuando hemos verificado la igualdad de los parámetros (a, f), usados para calcular el geode en ambos métodos, astrogeodésico y gravimétrico, procederemos de la siguiente forma:

1. Designaremos por (ξ, η) las componentes de la desviación de la vertical, con respecto al dátum gravimétrico absoluto, y

designaremos por (ξ', y') las referidas al datum astrogeodésico local. Entonces, puesto que en ambos sistemas se usa el mismo elipsoide de referencia, tenemos que $\delta a = \delta f = 0$, siendo:

$$\delta \xi = \xi - \xi' \quad \text{,,} \quad \delta y = y - y'$$

aplicando estas diferencias a las ecuaciones primera y segunda de XII.24, tenemos:

(ecuaciones XII.25)

Cuando $\delta \xi_1, \delta y_1, \delta N_1$ son conocidas (son los valores en el punto inicial, que son conocidos por ser conocidos los datum geodésico y astrogeodésico). Teóricamente, los valores obtenidos para (ξ, y) , deben coincidir con los valores que nos dan las fórmulas de Veising Meinesz (capítulo 8). Si designamos por (ξ^a, y^a) las desviaciones obtenidas en el sistema mundial, por medio de las ecuaciones XII.25, y designamos por (ξ^g, y^g) las obtenidas por las fórmulas de Veising Meinesz, tenemos en teoría que:

$$\xi^a = \xi^g \quad \text{,,} \quad y^a = y^g$$

El problema reside en que δN_1 no es conocido porque N_0 no es conocido (al menos no exactamente), es precisamente una cantidad a determinar. Además, $\xi^a - \xi^g$ y $y^a - y^g$ no son cero tienen un pequeño valor (son residuos), debido a los errores habituales de cualquier cálculo.

- La solución al problema planteado consiste en poner las cantidades $(\delta \xi_1, \delta y_1, \delta N_1)$, como incógnitas, que serán determinadas cuando la suma de los cuadrados de los residuos $\xi^a - \xi^g$ y $y^a - y^g$ en todas las estaciones astronómicas, sea mínima.

Esto puede hacerse mediante un ajuste ordinario por mínimos cuadrados, donde $(\delta\xi_1, \delta y_1, \delta N_1)$ son incógnitas, y las ecuaciones XII.25 son el sistema de ecuaciones a resolver:

(ecuación XII.26)

La fortaleza del método reside en que las incógnitas $(\delta\xi_1, \delta y_1, \delta N_1)$ se obtienen mediante una suma extendida a todas las estaciones astronómicas utilizadas, por ello, sus valores serán mucho más precisos que los valores obtenidos según el procedimiento indicado en el punto 1, porque en ese procedimiento los valores $(\delta\xi_1, \delta y_1)$ se calculan sólo en el punto P_1 (el punto fundamental).

Observaciones:

- La cantidad δN_1 es del mayor interés:

$$\delta N_1 = N_1 - N'_1$$

donde N'_1 es conocido, es la altitud del geóide en el punto inicial

● P_1 , y su valor junto con (ξ'_1, y'_1) son prescritos de antemano, para definir el datum astrogeodésico local $(a, f; \xi'_1, y'_1, N'_1)$.

Entonces recordando la ecuación 8.56 (b) que nos da la ondulación del geóide, y combinándola con el valor N_1 obtenido de:

$$N_1 = N'_1 + \delta N_1$$

tenemos:

(ecuación XII.27)

así pues, el parámetro δN_1 nos sirve para dos propósitos diferentes; permite el determinar " N_0 ", la escala del geóide geo.,

y transforma el datum astrogodésico local en un sistema geodésico local.

- Si el aplastamiento del elipsoide de referencia utilizado, cuyo valor del coeficiente f_2 , debe coincidir con el valor de este coeficiente para la Tierra (obtenido el de la Tierra a través de la dinámica de SAT), a_E es como sabemos el valor del semieje mayor del elipsoide medio terrestre (cuyo potencial es W_0 y su masa es la de la Tierra), este valor a_E desconocido a priori se podrá obtener sumando N_0 con "a" (el semieje del elipsoide de referencia utilizado).
- Si hemos obtenido la altitud del geoides N' en las estaciones astronómicas anteriores (fórmula de Helmer XII.14(A)), es posible también hallar $(\delta x_1, \delta y_1, \delta N_1)$ por la condición:

(ecuación XII.28)

- aplicada a la última ecuación de XII.24 , con $\delta a = \delta f = 0$. Así, N^a son las altitudes astrogodésicas del geoides dadas por la 3ª ecuación XII.24 (con $\delta a = \delta f = 0$), y N^g son las altitudes gravimétricas del geoides calculadas mediante X.56(B) .

Aproximación alternativa.

Anteriormente, hemos utilizado la definición de un sistema de coordenadas geodésicas o un datum de referencia, en la forma:

$$(a, f; x_1, y_1, N_1)$$

por ser la más común; no obstante, la definición:

$$(a, f; x_0, y_0, z_0)$$

proporciona en el algunos casos un planteamiento del problema, que puede ser más conveniente (geodesia tridimensional).

Por ello, a continuación vamos a plantear el problema de la determinación de los parámetros $(\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0)$, resolviéndolo de una forma análoga.

En primer lugar, recordemos que en el capítulo X, vimos que un desplazamiento paralelo del elipsoide de referencia, con respecto al centro de la Tierra, queda expresado en la ondulación del geoides por la adición de un armónico esférico de primer grado a la fórmula de Stokes (ecuación X.56 (b)), este término tiene la expres. X.50, que puede escribirse en coordenadas geodésicas (φ, λ) en la forma:

$$N_1 = \delta x_0 \cos \varphi \cos \lambda + \delta y_0 \cos \varphi \sin \lambda + \delta z_0 \sin \varphi$$

en suma:

(ecuaciones XII.29 (a) y (b))

por consiguiente, la ondulación del geoides determinada astrogeod. tendrá la forma XII.29 (a), debido al desplazamiento del elip. de referencia respecto del centro de la Tierra. Ahora cuando utilizamos las expresiones X.75, tenemos:

(ecuaciones X.30)

donde (ξ, η) denotan las derivadas parciales de N_{st} , precisamente las fórmulas de Venning Meinesz.

Las ecuaciones XII.29 y XII.30 son fundamentales para la determ. de las incógnitas $N_0, \delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$. Nuestros datos serán por una

parte las desviaciones y ondulaciones del geóide (desviaciones y ondulaciones astrogeodésicas) (ξ', η', N') , y por otra parte, las correspondientes (ξ, η, N_{st}) obtenidas gravimétricamente.

Notar que tres ecuaciones del tipo XII.30, nos permiten en principio, determinar $(\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0)$; mientras que cuatro ec. del tipo XII.29(a), nos permiten hallar los cuatro parámetros buscados. Así, observamos que el parámetro de escala " N_0 ", no puede ser determinado a partir sólo de las desviaciones de la vertical, puesto que las ecuaciones XII.30 no lo contienen.

En la práctica, tendremos muchas ecuaciones del tipo XII.29 y XII.30, de tal forma que aplicaremos las condiciones de mínimos, XII.26 y XII.28, con la formulación:

(ecuaciones XII.31)

Cuadro XII.8. Relación entre las ecuaciones XII.25, XII.27(b), XII.29(a), XII.30.

Cuando examinamos cuidadosamente las ecuaciones mencionadas, vemos que la única diferencia que existe entre ellas, reside en la elección de los parámetros usados para definir el dátum; en las ecuaciones XII.25 y XII.27(b) elegimos los parámetros:

$$\delta \xi_1, \delta \eta_1, \delta N_1$$

para efectuar el cambio de dátum; mientras que en las ec. XII.29(a), XII.30, consideramos:

$$\delta x_0, \delta y_0, \delta z_0$$

Por lo tanto, podríamos haber obtenido las ecuaciones XII.25, XII.27(b), XII.29 y XII.30, a partir de las fórmulas presentadas en el apartado XII.8, considerando que las coordenadas naturales del punto P (ξ, η, H), no son afectadas por un cambio de dátum, quedando invariables, es decir:

$$\begin{aligned}
 (\text{ecuaciones XII.7}) \Rightarrow \delta\phi &= -\delta\xi \\
 \delta\lambda \cos\phi &= -\delta y \\
 \delta h &= \delta N
 \end{aligned}$$

donde según el ejemplo XII.1 debemos considerar que:

$$\begin{aligned}
 \delta\phi &= -\delta\xi = \xi' - \xi \\
 \delta\lambda \cos\phi &= -\delta y = y' - y \\
 \delta h &= \delta N = -(N' - N)
 \end{aligned}$$

aplicando estas relaciones a las ecuaciones XII.21, con $\delta a = \delta f = 0$, tenemos las ecuaciones XII.29 (a) y XII.30; análogamente, si aplicamos las relaciones anteriores, con $\delta a = \delta f = 0$, a las ecuaciones XII.23, tenemos las ecuaciones XII.25 y XII.27 (b).

XII.10. Elipsoides más probables y elipsoide medio terrestre.

La definición de elipsoide medio terrestre, ya fue presentada en el capítulo X, diciendo que se trata de un elipsoide de rev. que comparte con la Tierra su masa M , el potencial W_0 , la diferencia entre los momentos principales de inercia y la velocidad angular ω ; siendo la mejor aproximación de la Tierra por un elipsoide, por ello, se le llama elipsoide medio terrestre.

Una definición alternativa de elipsoide medio terrestre, que resulta más interesante para el geodesta, puede formularse en la forma:

$$(\text{ecuación XII.32})$$

es decir, definimos el elipsoide medio terrestre como aquel elipsoide que aproxima al geoide más estrechamente.

La integral XII.32 , ha de considerarse como límite de una suma, pudiendo formularse tal condición de la forma alternativa:

(ecuación XII.33)

minimizando la suma de los cuadrados de las desviaciones de la vertical $\vartheta = \sqrt{x^2 + y^2}$. La definición XII.32 es más plausible y es la más apropiada intuitivamente; no obstante, ambas def. son teóricamente equivalentes.

Observaciones:

- La definición de elipsoide medio terrestre expresada por XII.33 , está particularmente bien adaptada al método astrogeodésico. No obstante, debido a que este método puede aplicarse solamente sobre áreas limitadas, sobre continentes; la integral XII.33 debe sustituirse por una suma que cubra las estaciones astronómicas de una región restringida:

(ecuación XII.34)

- Por ello, sólo podemos obtener el elipsoide más probable para la región considerada, en lugar de un elipsoide terrestre general. Este elipsoide puede ser completamente diferente al elipsoide medio terrestre, por ser éste último el elipsoide más probable para toda la Tierra.

- Para evitar que el elipsoide obtenido sea completamente diferente del elipsoide medio terrestre, es aconsejable restar el efecto de la topografía y de su compensación isostática, de las desviaciones astrogeodésicas de la vertical, antes de aplicar la condición de mínimo XII.34 . No obstante, este procedimiento tiene un problema por el cual queda descartado, el desconocimiento de las anomalías de la densidad y la falta de compensación

isostática completa. Por ello, es preferible emplear la condición de mínimo XII.26, restando los valores de las desviaciones astrog. a los valores de tales desviaciones obtenidos gravimétricamente. Realmente, el método de Hayford (consistente en restar la contrib. de la topografía y la isostasia, a las desviaciones astrogeodésicas de la vertical) es equivalente al uso de XII.26, estando los valores gravimétricos (ξ^g, η^g), aproximados por desviaciones que representen el efecto de la topografía y de su compensación isostática sólo. Pudiendo notar que ambos métodos tienen su imagen exacta, en la interpolación gravimétrica y topográfica, descrita en el apartado XII.7.

- Debemos notar, que a pesar de la relación que existe entre las condiciones de mínimo XII.26 y XII.33 (o XII.34), estas dos relaciones son de naturaleza esencialmente diferente. Recordemos que la ecuación XII.26 involucra residuales que son teóricamente cero, sólo son distintos de cero a causa de las imprecisiones en las medidas y los errores de cálculo; mientras que la ec. XII.33 o XII.34 involucran cantidades que son esencialmente distintas de cero. En suma, XII.26 es una condición de ajuste, mientras que XII.33 o XII.34 representa una definición, la def. de elipsoide medio terrestre.

Equivalencia de las diferentes definiciones de elipsoide medio terrestre.

En este apartado comprobaremos, que en la aproximación esférica ordinaria, las distintas definiciones de elipsoide medio terrestre, son equivalentes entre sí. Primeramente, presentaremos una definición de elipsoide medio terrestre, debida a Rudzki :

(ecuación XII.35)

A continuación vamos a comprobar la equivalencia de todas las def. para ello, escribimos el desarrollo en armónicos esféricos del potenc. perturbador, en la forma:

(ecuación XII.36)

tal como se indicó en el capítulo X, mediante las expresiones X.8 y VIII.48, considerando que:

$$T_0 = \frac{k\delta M}{R}, \quad T_1(\sigma, \lambda) = 0 \quad \left(\begin{array}{l} \text{cuando el centro del} \\ \text{elipsoide coincide con el} \\ \text{centro de la Tierra} \end{array} \right)$$

en consecuencia según los desarrollos del capítulo X, podemos escribir (ecuaciones X.46, X.47, X.54, X.60, entre otras):

(ecuaciones XII.37 y XII.38)

Ahora si suponemos la igualdad de masas entre el elipsoide y la Tierra (una de las características del elipsoide medio terrestre), elevando al cuadrado las ecuaciones XII.37 y XII.38, e integrando sobre toda la Tierra, como indican las condiciones XII.32 y XII.35, tenemos que todas las integrales de los productos de diferentes armónicos R_{lm} y S_{lm} , serán cero por las condiciones de ortogonalidad VIII.49, las integrales restantes distintas de cero vendrán dadas por las ecuaciones VIII.50, esto es:

(ecuaciones XII.39 y XII.40)

Mediante una deducción más laboriosa, que omitiremos aquí, puede obtenerse una fórmula similar para los componentes

de la desviación de la vertical. En consecuencia, sabiendo que cuando alteramos la forma, dimensiones y posición del elipsoide de referencia, estamos cambiando precisamente los valores de los coeficientes:

$$\delta W, a_{10}, a_{11}, b_{11}, a_{20}$$

según se explica en el capítulo **X**, ecuaciones **X.19** a **X.22**, quedando los demás coeficientes prácticamente invariantes; el mínimo de cualquiera de las expresiones **XII.39**, **XII.40**, se obtendrá cuando tales coeficientes sean cero, entonces tendremos la igualdad de potencial entre la Tierra y el elipsoide de ref. ($W_0 = U_0, \delta W = 0$), junto con la coincidencia del centro del elipsoide de referencia con el centro de la Tierra, además la igualdad de f_2 entre ambos cuerpos estará obligada por $a_{20} = 0$. En suma, queda establecida la equivalencia de la definición de elipsoide medio terrestre, por medio de M, W_0, ω y $K(C - \bar{A})$, y las condiciones dadas por las ecuaciones **XII.32**, **XII.33** y **XII.35**.

Observaciones:

- Notar que la ecuación **XII.40**, no contiene término de primer grado, debido al factor $(n-1)^2$, por tanto, no permite determinar este término, por estar ausente.
- En el presente apartado hemos supuesto sin decirlo, que no hay masas fuera del geoide, esto significa que δg debe estar dado por las anomalías de condensación (capítulo **XI**).

XII.11. Geodesia tridimensional.

Aunque la idea del cálculo riguroso de una triangulación en el espacio, se remonta a la época de Brunns (año 1878), la posibilidad de utilizar un satélite como una referencia elevada, que se observa de forma simultánea desde varias estaciones terrestres, permite aplicar el método que vamos a describir a continuación, para determinar la posición del satélite (en ese instante de tiempo) al igual que las posiciones de las estaciones terrestres, sin tener el problema de la refracción atmosférica, la desviación de la línea de la plomada o la necesidad de que las estaciones terrestres sean visibles entre sí. El desarrollo actual de la geodesia espacial, fomentado por la carrera espacial y su afán por conquistar el espacio, hace que el método que aquí vamos a describir, sea en la actualidad uno de los principales sistemas de determinación, de posiciones terrestres.

Para comenzar la descripción de este método, consideraremos el poliedro de la figura superior izquierda, el cual está formado por los vértices de una red sobre la superficie de la Tierra y las visuales rectas que los conectan, otro conjunto de rectas representado, una por cada vértice, son las líneas de la plomada en las estaciones. Para determinar esta figura (poliedro de Brunns), necesitamos cinco parámetros para cada estación, tres coordenadas y las componentes de la línea de la plomada; siendo los datos disponibles:

- Ángulos horizontales y distancias cenitales; obtenidos por la observación con un teodolito.
- Distancias espaciales rectas, obtenidas, por ejemplo, mediante la medida electrónica de distancias.

- Observaciones astronómicas de latitud y longitud, para fijar la línea de la plomada.
- Observaciones astronómicas de acimut, para determinar la orientación del poliedro.

Si elegimos un sistema de coordenadas rectangulares, entonces las tres coordenadas que han de determinarse para cada estación serán (x, y, z) . Podemos además, considerar el sistema local de coordenadas (u, v, w) , de tal forma que sus vectores unitarios, $(\vec{n}, \vec{e}', \vec{e}'')$, tienen la expresión:

(ecuaciones XII.41 (a), (b) y (c))

donde el sistema de coordenadas geocéntrico, en el cual están definidos los vectores $(\vec{n}, \vec{e}', \vec{e}'')$, tiene el plano XZ definido por el meridiano de Greenwich, siendo el eje Z coincidente con el eje medio de rotación de la Tierra, y el plano ecuatorial es el plano XY .

En la segunda transparencia figura superior izquierda, puede verse la definición de las coordenadas geográficas de P .

Notar que las coordenadas astronómicas horizontales topocéntricas, se definen de forma similar al sistema de coordenadas (u, v, w) , sólo cambia que "x" tiene sentido positivo hacia el sur y "y" tiene sentido positivo hacia el oeste. También hay que notar, que el vector unitario \vec{n} está definido por la dirección de la línea de la plomada.

El primer paso para la determinación de las incógnitas buscadas, será escribir el acimut astronómico "A", la distancia cenital astron. Z' medida y la distancia espacial "s", en términos de (x, y, z, Φ, Λ) .

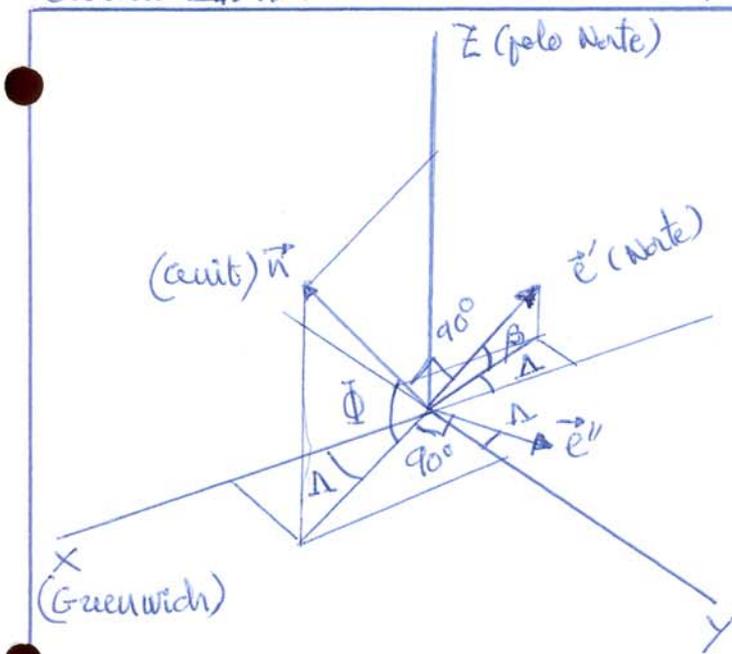
Cuando examinamos la figura del sistema de coordenadas (u, v, w) , identificamos rápidamente:

$$\Delta \vec{X} = \vec{X}_Q - \vec{X}_P \quad \left(\text{vector de P a Q, donde P es la estación sobre la cual consideramos el sistema de coordenadas } (u, v, w), |\Delta \vec{X}| = s. \right)$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{v}{u}$$

$$\cos z' = \frac{w}{s} \quad ,, \quad u = \Delta \vec{X} \cdot \vec{e}' \quad ,, \quad v = \Delta \vec{X} \cdot \vec{e}'' \quad ,, \quad w = \Delta \vec{X} \cdot \vec{n}$$

Cuadro XII.9. Demostración de las ecuaciones XII.41(a), (b), (c).



Examinando la figura de la transparencia podemos dibujar los vectores $(\vec{n}, \vec{e}', \vec{e}'')$, en la forma indicada. Debemos notar en primer lugar que:

$$\vec{n} = (\cos \Phi \cos \Lambda, \cos \Phi \sin \Lambda, \sin \Phi)$$

en segundo lugar, \vec{n} y \vec{e}' son perpendiculares y contenido en el plano meridiano de P, por tanto:

$$\Phi + 90^\circ + \beta = 180^\circ \Rightarrow \beta = 90^\circ - \Phi \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{e}' = (-\cos \beta \cos \Lambda, -\cos \beta \sin \Lambda, \sin \beta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \vec{e}' = (-\sin \Phi \cos \Lambda, -\sin \Phi \sin \Lambda, \cos \Phi)$$

(pág. 45; Schramm)

finalmente, es fácil ver que $\vec{e}'' = (-\sin \Lambda, \cos \Lambda, 0)$

cantidades de las cuales podemos obtener:

$$A = \operatorname{tg}^{-1}\left(\frac{v}{u}\right) = \operatorname{tg}^{-1} \frac{\Delta \vec{X} \cdot \vec{e}''}{\Delta \vec{X} \cdot \vec{e}'}$$

$$Z' = \cos^{-1}\left(\frac{w}{\Delta}\right) = \cos^{-1} \frac{\Delta \vec{X} \cdot \vec{n}}{(\Delta \vec{X} \cdot \Delta \vec{X})^{1/2}} \Rightarrow (\text{ecuaciones XII.42 (a)(b)(c)})$$

$$\Delta = (\Delta \vec{X} \cdot \Delta \vec{X})^{1/2}$$

Donde debemos resaltar que los observables son el acimut, la distancia cenital y la distancia lineal, pudiendo expresar en la forma XII.42 (a), no sólo el acimut sino también los ángulos horizontales medidos en la triangulación, puesto que, como antes se ha dicho, todo ángulo horizontal puede considerarse como la diferencia de dos acimutes.

Fórmulas diferenciales.

En la práctica, las ecuaciones XII.42 no se utilizan directamente, ya que, se dispone, generalmente, de valores previos aprox. de las coordenadas (x, y, z) de las estaciones consideradas, entonces las ecuaciones XII.42 sólo se utilizan para calcular correcciones, mediante fórmulas diferenciales derivadas de ellas. Para el acimut A , podemos escribir:

$$(\text{ecuaciones XII.43 (a) y (b)})$$

donde Q es un punto (o estación) observado desde "P", (Φ_P, Λ_P) nos definen la dirección de la línea de la plomada en P. Si queremos expresar el acimut en función de las coordenadas (ϕ, λ, h) , en lugar

de emplear las coordenadas (X, Y, Z) , podemos sustituir las ec. XII.40 en la expresión XII.42(a), sin embargo, resultarían funciones muy complicadas y de poca utilidad, en la práctica son preferibles, como ya se ha dicho, las fórmulas diferenciales. Para ello, expresaremos $(\delta X, \delta Y, \delta Z)$ como función de $(\delta\phi, \delta\lambda, \delta h)$, mediante las ecuaciones XII.20, poniendo $\delta x_0 = \delta y_0 = \delta z_0 = \delta a = \delta f = 0$, $a \in \mathbb{R}$; así tenemos:

(ecuaciones XII.44)

que sustituidas en las ecuación XII.43(a), nos permite escribir:

(ecuación XII.45(a))

y análogamente también para $\delta z'$ y δs :

(ecuaciones XII.45(b) y (c))

donde los coeficientes (a_i, b_i, c_i) son:

(ecuaciones XII.46)

con la abreviatura $\Delta\lambda = \lambda_a - \lambda_P$, omitiendo el subíndice P en las cantidades que se refieren al punto P, e indicando con el subíndice a las cantidades medidas en a, como son el acimut de P o la distancia cenital de P, medidos desde a.

Observaciones:

- En las fórmulas XII.46 sólo aparecen las coordenadas geodésicas (ϕ, λ) y no aparecen las coordenadas (Φ, Λ) astronómicas, debido a que hemos considerado que "para hallar el pequeño valor de los coeficientes (a_i, b_i, c_i) ", podemos poner $\Phi = \phi$, $\Lambda = \lambda$, sin pérdida de precisión.

- No obstante, la diferencia conceptual fundamental entre las latitudes y longitudes, astronómicas y geodésicas debe ser clara. advertida; las coordenadas astronómicas son los parámetros que definen la dirección de la línea de la plomada, y aparecen en los coeficientes (a_i, b_i, c_i) al diferenciar XII.42 para obtener XII.43 ; mientras que las coordenadas geodésicas (ϕ, λ) entran junto con "h", para designar las coordenadas del punto, siendo esencialmente equivalentes a (x, y, z) .
- Debemos notar que para δs no hay dependencia con $(\delta\phi, \delta\lambda)$, ya que, la distancia espacial no depende de la dirección de la línea de la plomada (ver XII.42 (c)).

Cuadro XII.10 . Demostración de las ecuaciones XII.46 .

Para comprobar las ecuaciones XII.46 , nos limitaremos a comprobar alguno de los coeficientes, siendo análoga la comprobación de los restantes. Tomando, por ejemplo, la ecuación XII.43 y sust. en la misma las ecuaciones XII.44 , trataremos de determinar

" a_1 " :

$$\begin{aligned} \delta A &= \kappa_1 \delta x_P + \kappa_2 \delta y_P + \kappa_3 \delta z_P + \dots = \\ &= \kappa_1 (-\text{sen}\phi \cos\lambda R) \delta\phi_P + \kappa_2 (-\text{sen}\phi \text{sen}\lambda R) \delta\phi_P + \kappa_3 \cos\phi R \delta\phi_P \\ &\quad + \dots \end{aligned}$$

por lo tanto :

$$a_1 = R (-\text{sen}\phi \cos\lambda \kappa_1 - \text{sen}\phi \text{sen}\lambda \kappa_2 - \cos\phi \kappa_3)$$

de esta forma, es necesario hallar κ_1, κ_2 y κ_3 para poder determinar a_1 . Para ello, sabemos que κ_1, κ_2 y κ_3 son :

(pág. 54; Schaum) $\frac{\partial A}{\partial X_P} = \frac{1}{1 + (v/u)^2} \frac{\partial(v/u)}{\partial X_P}$ " $\frac{\partial A}{\partial Y_P} = \frac{1}{1 + (v/u)^2} \frac{\partial(v/u)}{\partial Y_P}$

$$\frac{\partial A}{\partial Z_P} = \frac{1}{1 + (v/u)^2} \frac{\partial(v/u)}{\partial Z_P} \quad " \quad \frac{\partial}{\partial X_P} \left(\frac{v}{u} \right) = \frac{(\cos \lambda)u - (v \sin \phi \cos \lambda)v}{u^2} \quad "$$

$$\frac{\partial}{\partial Y_P} \left(\frac{v}{u} \right) = \frac{-(\cos \lambda)u - (v \sin \phi \sin \lambda)v}{u^2} \quad " \quad \frac{\partial}{\partial Z_P} \left(\frac{v}{u} \right) = \frac{v}{u^2} \cos \phi$$

además el término $(1 + (v/u)^2)^{-1}$ se puede simplificar de la forma:

$$\frac{u^2}{u^2 + v^2} \quad (\text{eliminando } u^2 \text{ del denominador } \frac{\partial}{\partial X_{i^2}} \left(\frac{v}{u} \right))$$

quedando "a₁" en la forma:

$$a_1 = \frac{R}{u^2 + v^2} \left[\begin{array}{l} -v \sin \phi \cos \lambda (u \sin \lambda - v \sin \phi \cos \lambda) - v \sin \phi \sin \lambda (-u \cos \lambda - v \sin \phi) \\ \sin \lambda + (\cos^2 \phi) v \end{array} \right] = \frac{Rv}{u^2 + v^2} = \frac{R \sqrt{u^2 + v^2} \sin \alpha}{u^2 + v^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a_1 = \frac{R \sin \alpha}{\sqrt{u^2 + v^2}} = \frac{R \sin \alpha}{\gamma \sin z}}$$

Podemos finalizar este cuadro obteniendo "a₇", coeficiente que tiene la peculiaridad de estar definido como:

$$\delta A = \dots + k_7 \delta \Phi_P + k_8 \delta \Lambda_P = \dots + a_7 \delta \Phi_P + a_8 \delta \Lambda_P$$

así $a_7 = k_7$, se obtendrá mediante una derivada parcial, que será similar a las de la parte superior:

$$\frac{\partial A}{\partial \Phi} = \frac{u^2}{u^2 + v^2} \cdot \frac{v(\Delta x \cos \phi \cos \lambda + \Delta y \cos \phi \sin \lambda + \Delta z \sin \phi)}{u^2} = \frac{v \omega}{u^2 + v^2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{a_7 = \sin \alpha \cot z}$$

Geodesia tridimensional, procedimiento práctico.

La forma de calcular las coordenadas de cada estación y la desviación de la vertical en la misma, se lleva a cabo como sigue:

1. Es necesario conocer unos valores de partida para (ϕ, λ, h) , para ello, podemos utilizar las coordenadas geodésicas obtenidas por el método astrogodésico; o también, poner para cada estación:

$$\phi^{\circ} = \Phi, \quad \lambda^{\circ} = \Lambda, \quad h^{\circ} = H$$

- las coordenadas naturales, donde H puede ser obtenido para cada estación como se indica en el seminario III.

2. Con los valores preliminares $(\phi^{\circ}, \lambda^{\circ}, h^{\circ})$ obtenemos $(x^{\circ}, y^{\circ}, z^{\circ})$ mediante las ecuaciones III.4(b).

3. Calculamos tantos acimutes A° , distancias cenitales z° y distancias lineales s° , como sean necesarios, para compararlos con los valores observados. Los valores $A^{\circ}, z^{\circ}, s^{\circ}$ son calculados mediante las ecuaciones III.42.

4. Obtenemos las diferencias:

$$\delta A = A - A^{\circ}, \quad \delta z' = z' - z^{\circ}, \quad \delta s = s - s^{\circ}$$

de los cuales mediante el método de mínimos cuadrados, aplicado a las ecuaciones III.45, obtenemos:

$$\delta \phi, \delta \lambda, \delta h, \delta \Phi, \delta \Lambda$$

teniendo así, para cada estación, las coordenadas geodésicas y la desviación de la vertical:

$$\begin{array}{l|l} \phi = \phi^{\circ} + \delta \phi, & \Phi = \Phi^{\circ} + \delta \Phi \\ \lambda = \lambda^{\circ} + \delta \lambda, & \Lambda = \Lambda^{\circ} + \delta \Lambda \\ h = h^{\circ} + \delta h & \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \zeta = \Phi - \phi \\ y = (\Lambda - \lambda) \cos \phi \end{array}$$

Relación entre geodesia tridimensional (moderna) y geodesia clásica.

Para indagar acerca de la relación que existe entre ambos métodos, en primer lugar, consideraremos que:

$$0 = \delta\phi_P = \delta\phi_Q = \delta\lambda_P = \delta\lambda_Q = \delta h_P = \delta h_Q$$

entonces las ecuaciones XII.45 nos dan:

$$\delta A = a_7 \delta\phi_P + a_8 \delta\lambda_P \quad \delta z' = b_7 \delta\phi_P + b_8 \delta\lambda_P \quad (\text{en el punto } P)$$

si ponemos en el lugar de $(\delta\phi_P, \delta\lambda_P)$ las cantidades:

$$\delta\Phi = -\xi \quad (= \Phi - \phi) \quad \delta\Delta = -\eta \sec\phi \quad (= \Delta - \lambda)$$

esto significa que sin movernos del punto P , es decir, sin cambiar sus coordenadas elipsóidicas (ϕ, λ, h) , cuando ponemos:

$$\Phi^0 + \delta\Phi = \Phi^0 - \xi = \phi_P$$

$$\Delta^0 + \delta\Delta = \Delta^0 - \eta \sec\phi = \lambda_P$$

estamos pasando de la dirección de la línea de la plomada, a la dirección de la normal elipsóidica en P , para la cual (ϕ, λ) son sus parámetros de dirección. Entonces las cantidades determinadas $(\delta A, \delta z')$, nos permitirán pasar de acimut A y distancia cenital z' , observados, al acimut α y la distancia cenital elipsóidicos:

$$\delta A = A - A_0 \Rightarrow \alpha = A_0 + \delta A = A_0 - a_7 \xi - a_8 \eta \sec\phi$$

$$\delta z' = z' - z_0 \Rightarrow z = z_0 + \delta z' = z_0 - b_7 \xi - b_8 \eta \sec\phi$$

cundo ponemos los coeficientes XII.46 (a_7, a_8, b_7, b_8) tenemos:

$$(\text{ecuaciones XII.47})$$

llegando a las conocidas ecuaciones XII.6, XII.8; por un camino diferente, que muestra la equivalencia formal de ambos

procedimientos. Vemos así, que el método clásico desarrollado al principio de este capítulo, basado en la reducción al elipsoide y cálculo mediante cantidades elipsóidicas, es formalmente equivalente al método tridimensional formulado por las ecuaciones XII.45.

Observaciones:

- La principal diferencia entre el método tridimensional y el astrogeodésico, reside en que "N", la ondulación del geóide, se determina en el segundo, mediante la integración de las desv. de la vertical; mientras que en el primero se obtiene mediante medidas de distancias zenitales, acimutes y distancias (ecuaciones XII.45) o también mediante distancias zenitales (seminario III), junto con las altitudes ortométricas, restando a las altitudes trigonométricas. En la práctica, la determinación de "N" es preferible por el método astrogeodésico, por estar la medida de distancias zenitales muy afectada por la refracción atmosférica. No obstante, en el capítulo dedicado a los métodos especiales, vemos que la refracción atmosférica no es un problema grave, cuando se utilizan SAT, como referencia elevada, en ese caso el método tridimensional vuelve a ser adecuado.
- El método tridimensional expuesto (triangulación espacial de Bress y Hotine), lo mismo que el método astrogeodésico es incapaz de determinar la posición de los dátum locales, con respecto al centro de la Tierra.